# DIE METHODE DER FILTERANALYSE IN DER ATMOSPHÄRISCHEN ENERGETIK

Von

H. FORTAK

BERLIN 1968

## ZUSAMMENFASSUNG

Anstelle einer Fourierspektralanalyse des Systems der hydrodynamischen Gleichungen, besonders des Systems der Energiegleichungen, wird in der vorliegenden Arbeit die einfachere und für Parametrisierungszwecke besser geeignete Methode der Filteranalyse angewandt, wobei man sich die im Einzelfall anzuwendenden Filter als numerisch-diskret gegeben denken kann.

Die für eine derartige Filteranalyse erforderliche wiederholte Überschiebung des Systems von Gleichungen kann auf einen leicht übersehbaren Algorithmus zurückgeführt werden. Dies wirkt sich günstig besonders beim System der Energiegleichungen aus, welches nach mehrfacher Überschiebung die prinzipielle Struktur der Energieflußdiagramme einfach erkennen läßt und welches alle Wechselwirkungsenergien, auch diejenigen mit der Umgebung, vollständig enthält.

## SUMMARY

Instead of a generalized FOURIER spectral analysis of the complete system of hydrodynamic equations a method of formal filter analysis is applied. This method appears to be suitable with respect to the general problem of parametrization of correlation products, especially in connection with the system of energy equations. The applied filters can be thought to be given numerically and discrete. In this context a repeated process of filtering of the original system is required. For this, a simple algebraic algorithm is developed. As a by-product the structures of energy-flux diagrams are quite clear and simple. The diagrams contain all energy exchange terms between the various spectral bands and, in addition, those with the surroundings.

## 1 ALLGEMEINES ÜBER FILTERANALYSE

Infolge seines speziellen Ansprechverhaltens auf zeitliche Änderungen einer Meßgröße liefert jedes zeitlich registrierende meteorologische Meßinstrument nur (nicht exakt zu definierende) "Mittelwerte" und wirkt im Prinzip wie ein (nicht-idealer) Tiefpaßfilter. Je nach Instrument wird ein mehr oder weniger großer Bereich des kurzperiodischen Teils des Spektrums unterdrückt.

In gleicher Weise wirkt sich jedes räumliche Netz von Instrumenten aus, welches gleichzeitig an diskreten Punkten eine räumliche Verteilung einer (zeitlich geeignet gefilterten) Meßgröße ermittelt. Je nach Abstand der Meßstellen voneinander wird auch hier ein mehr oder weniger großer Bereich des kurzwelligen Teils des Spektrums unterdrückt, so daß sich aus der Art des Beobachtungsnetzes (im Zusammenhang mit der zeitlichen Filterung an jeder Beobachtungsstation) auch hier die Wirkung eines räumlichen Tiefpaßfilters ergibt.

Unter idealen Verhältnissen lägen die Meßstellen beliebig dicht und wären mit Instrumenten beliebig hoher Ansprechbarkeit ausgerüstet. Dann könnte man mit Hilfe der Spektral- bzw. Filteranalyse das Verhalten der Meßgröße in Zeit und Raum befriedigend untersuchen.

Die realen Verhältnisse sind davon weit entfernt: Stationen mit zeitlich hoch auflösenden Instrumenten existieren kaum, und auch solche Stationen mit starken Tiefpaß-behafteten Instrumenten liegen räumlich sehr weit voneinander entfernt. Dies entspricht einer starken räumlichen Tiefpaßfilterung, denn alle Phänomene subsynoptischer Art werden durch das synoptische Beobachtungsnetz nicht aufgelöst.

Das Problem der Parametrisierung aller subsynoptischer Prozesse besteht nun darin, daß man versucht, durch systematische kleinräumige (und auch mittelräumige), zeitlich hoch auflösende Meßprogramme die wechselseitige Abhängigkeit von synoptischen und subsynoptischen Prozessen als Funktion der synoptischen Variablen darzustellen, d.h. also als Funktion von Beobachtungen, die mit trägen, weit auseinanderliegenden Instrumenten angestellt wurden.

Wegen der stark variierenden energetischen Besetzung der Spektralbereiche im Spektrum der subsynoptischen Prozesse erscheint eine einfache Mittelbildung, wie sie bisher für Parametrisierungszwecke verwendet wurde, nicht ausreichend. Dies zeigt u. a. die starke Variabilität der "Austauschkoeffizienten", welche sich schwer in ein System bringen läßt, wenn man nur die großräumigen Variablen als Parameter benutzt.

Die modernen Methoden der Spektralanalyse der atmosphärischen Turbulenz, sowohl in ihrer Anwendung auf das Beobachtungsmaterial, wie auch besonders bei ihrer Behandlung des Systems der hydrodynamischen Gleichungen geben trotz ihrer sauberen mathematischen Geschlossenheit wenig Hoffnung, das Parametrisierungsproblem von der theoretischen Seite her zu lösen.

Weit weniger aufwendig und in vielen Fällen der physikalischen Realität unmittelbarer angepaßt, ist die Methode der Filterung, welche sich sowohl einfach auf das Beobachtungsmaterial als auch unmittelbar und leicht durchschaubar auf das System der hydrodynamischen Gleichungen anwenden läßt.

Eine Spektralbandanalyse erfordert eine nur endliche Zahl von wiederholt anzuwendenden Bandpaßfilterungen, wobei man sich z.B. einen einzelnen Bandpaßfilter aus je einem Hoch- und Tiefpaßfilter konstruieren kann. Dabei erhält man ein endliches System von Gleichungen für die endliche Zahl von Spektralbereichen, welche wegen der Nichtlinearität der Gleichungen über gewisse Korrelationsprodukte miteinander verkoppelt sind.

Für Parametrisierungszwecke scheint die Methode der wiederholten Tiefpaßfilterung vorzuziehen zu sein. Jeder Tiefpaß repräsentiert einen besonderen "Scale", indem er die Frequenzen (Wellenzahlen) des darunterliegenden "Scales" abschneidet. Als Endresultat erhält man so ein System von Gleichungen für den höchsten "Scale", für den man sich interessiert, in welchem jedoch die Wechselwirkungen mit allen niederen "Scales" und diejenigen der niederen "Scales" untereinander in Form von Korrelationsprodukten erscheinen. In der Deutung dieser Korrelationsprodukte liegt die Aufgabe der Parametrisierung im konventionellen Sinne.

Man kann jedoch ebenso eine wiederholte Hochpaßfilterung vornehmen, was ebenfalls praktische Bedeutung hat. Hier soll ganz allgemein ein Schema entwickelt werden, wie sich das System von hydrodynamischen Gleichungen und von Energiegleichungen gegenüber einer beliebigen Zahl von Filteranwendungen verhält.

## 2 MEHRFACHFILTERUNG DES SYSTEMS DER HYDRODYNAMISCHEN GLEICHUNGEN

Das System der hydrodynamischen Gleichungen läßt sich in der folgenden zusammengefaßten Form

$$\boxed{\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{\rho \mathbf{u} A + \mathbb{B}\right\} = C} \tag{1}$$

schreiben, wenn für die "Eigenschaft" A , den "nichtkonvektiven Transportvektor" $\mathbb{B}$ (für $A = \mathbf{u}$ ist dies ein Tensor) und für die räumliche Quellfunktion C gesetzt werden:

| A | $\mathbb{B}$ | C | |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{u}$ | $p\mathbb{E} - \mathbb{F}$ | $-2\boldsymbol{\omega} \times \rho\mathbf{u} - \rho\nabla\Phi$ | (2) |
| 1 | o | o | (3) |
| $e + \Phi$ | $\mathbb{W}$ | $-p\nabla\cdot\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}\cdot\cdot\mathbb{F} + \rho\mathbf{u}\cdot\nabla\Phi$ | (4) |
| $\mathbf{u}^2/2$ | $(p\mathbb{E} - \mathbb{F})\cdot\mathbf{u}$ | $p\nabla\cdot\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}\cdot\cdot\mathbb{F} - \rho\mathbf{u}\cdot\nabla\Phi$ | (5) |
| $\mathbf{u}^2/2 + e + \Phi$ | $(p\mathbb{E} - \mathbb{F})\cdot\mathbf{u} + \mathbb{W}$ | o | (6) |

In der Reihenfolge der Tabelle erhält man mit (1) so den Impulssatz (Bewegungsgleichung), den Massenerhaltungssatz (Kontinuitätsgleichung), die thermische Energiegleichung (Erster Hauptsatz), geschrieben als Gleichung für die potentielle Energie $e + \Phi$ , die dynamische Energiegleichung und schließlich den Erhaltungssatz der Gesamtenergie.

Im Gegensatz zu $\mathbb{B}$ ist in (1) $\rho\mathbf{u}A$ der "konvektive Transportvektor (-tensor)", welcher den Transport der Eigenschaft A durch den Strömungsvektor $\mathbf{u}$ beschreibt.

Die Bedeutung der in der Tabelle verwendeten Symbole ist die folgende: p: Druck, $\rho$: Dichte, e: innere Energie, $\Phi$: Schwerepotential, $\boldsymbol{\omega}$: Drehvektor der Erdrotation, $\mathbb{E} = \mathbb{i}\mathbb{i} + \mathbb{j}\mathbb{j} + \mathbb{k}\mathbb{k}$: Einheitstensor, $\mathbb{W}$: Wärmestromvektor (Wärmeleitung, Strahlung),

$$\mathbb{F} = \rho\nu\left\{\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbb{E}\right\} \quad : \tag{7}$$

NAVIER-STOKESscher Reibungstensor, $\nu$: kinematische Zähigkeit [$cm^2/sec$],

$$\nabla\mathbf{u}\cdot\cdot\mathbb{F} = \rho\delta \geqq o\ (!) : \tag{8}$$

Energiedissipation pro Volumen- und Zeiteinheit bewirkt durch molekulare Reibung und $p\nabla\cdot\mathbf{u}$ Expansionsarbeit pro Volumen- und Zeiteinheit.

Den Zeilen (4) und (5) der Tabelle entnimmt man, daß bei internen Energieumwandlungen, beschrieben durch die rechten Seiten, zwischen kinetischer und totaler potentieller Energie ein Austausch von Expansionsarbeit und potentieller Energie stattfindet und daß wegen (8) durch Energiedissipation ein Gewinn von totaler potentieller Energie auf Kosten der kinetischen Energie zustandekommt. Die nichtkonvektiven Transporte der beiden Energieformen, d.h. $\mathbf{W}$ (Wärmestrom pro Flächen- und Zeiteinheit) und $(p\mathbb{E} - \mathbb{F})\cdot\mathbf{u}$ (Arbeit der Druck- und Reibungskräfte pro Flächen- und Zeiteinheit) stellen den energetischen Kontakt mit der Umgebung eines Flüssigkeitsvolumens her.

Wendet man nun auf (1) n verschiedene lineare und mit der Dichte gewogene Filteroperatoren in beliebiger Reihenfolge an, dann erhält man, wenn jeder Querstrich einen verschiedenen Filteroperator darstellen kann, nach bekanntem Verfahren

$$\overline{\rho A} = \bar{\rho}\hat{A} = \rho_1 A_1 \qquad ; \quad \overline{\rho A''} = 0$$

$$\overline{\overline{\rho A}} = \overline{\rho_1 A_1} = \bar{\rho}_1 \hat{A}_1 = \rho_2 A_2 \quad ; \quad \overline{\rho_1 A''_1} = 0$$

$$\overline{\overline{\overline{\rho A}}} = \overline{\rho_2 A_2} = \bar{\rho}_2 \hat{A}_2 = \rho_3 A_3 \quad ; \quad \overline{\rho_2 A''_2} = 0$$

(9)
$$\boxed{\overset{\boxed{n}}{\rho A} = \rho_n A_n \quad ; \quad \overline{\rho_{n-1} A''_{n-1}} = 0}$$

$$\overline{\rho\mathbf{u}A} = \bar{\rho}\hat{\mathbf{u}}\hat{A} + \overline{\rho\mathbf{u}''A''} = \rho_1\mathbf{u}_1 A_1 + \overline{\rho\mathbf{u}''A''}$$

$$\overline{\overline{\rho\mathbf{u}A}} = \bar{\rho}_1\hat{\mathbf{u}}_1\hat{A}_1 + \overline{\rho_1\mathbf{u}''_1 A''_1} + \overline{\overline{\rho\mathbf{u}''A''}} = \rho_2\mathbf{u}_2 A_2 + \overline{\rho_1\mathbf{u}''_1 A''_1} + \overline{\overline{\rho\mathbf{u}''A''}}$$

(1o)
$$\boxed{\overset{\boxed{n}}{\rho\mathbf{u}A} = \rho_n\mathbf{u}_n A_n + \sum_{\mu=0}^{n-1} \overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu \mathbf{u}''_\mu A''_\mu}}$$

Mit (9) und (1o) wird nach mehrfacher Filterung aus der zusammengefaßten Form (1) des Systems der hydrodynamischen Gleichungen:

(11)
$$\boxed{\frac{\partial\rho_n A_n}{\partial t} + \nabla\cdot\left\{\rho_n\mathbf{u}_n A_n + \left(\overset{\boxed{n}}{\mathbb{B}} + \sum_{\mu=0}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu\mathbf{u}''_\mu A''_\mu}\right)\right\} = \overset{\boxed{n}}{C}}$$

Bei Verwendung von mit der Dichte gewogenen Filtern bleibt Gleichung (1) in ihrer Struktur vollkommen erhalten, wenn nur der nichtkonvektive Transportvektor (-tensor) $\overset{\boxed{n}}{\mathbb{B}}$ durch nichtkonvektive "turbulente" Transportvektoren (-tensoren) additiv ergänzt wird.

Beachtet man die leicht verifizierbaren folgenden Beziehungen

$$\overset{\boxed{n}}{p\nabla\cdot\mathbf{u}} = p_n\nabla\cdot\mathbf{u}_n + \sum_{\mu=0}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{p_\mu\nabla\cdot\mathbf{u}''_\mu}$$

$$\overset{\boxed{n}}{\nabla\mathbf{u}\cdot\cdot\mathbb{F}} = \nabla\mathbf{u}_n\cdot\cdot\overset{\boxed{n}}{\mathbb{F}} + \sum_{\mu=0}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{\nabla\mathbf{u}''_\mu\cdot\cdot\overset{\boxed{\mu}}{\mathbb{F}}}$$

$$\overset{\boxed{n}}{(p\mathbb{E}-\mathbb{F})\cdot\mathbf{u}} = (p_n\mathbb{E}-\overset{\boxed{n}}{\mathbb{F}})\cdot\mathbf{u}_n + \sum_{\mu=0}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{(p_\mu\mathbb{E}-\overset{\boxed{\mu}}{\mathbb{F}})\cdot\mathbf{u}''_\mu}$$

dann ergibt sich das den Zeilen (2) - (4) der Tabelle entsprechende mehrfach gefilterte System von Gleichungen

$$\frac{\partial\rho_n\mathbf{u}_n}{\partial t} + \nabla\cdot\left\{\rho_n\mathbf{u}_n\mathbf{u}_n + p_n\mathbb{E} - \Big(\overset{\boxed{n}}{\mathbb{F}} - \sum_{\mu=0}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu\mathbf{u}''_\mu\mathbf{u}''_\mu}\Big)\right\} = -2\boldsymbol{\omega}\times\rho_n\mathbf{u}_n - \rho_n\nabla\Phi \qquad (12)$$

$$\frac{\partial\rho_n}{\partial t} + \nabla\cdot\rho_n\mathbf{u}_n = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_n(e_n+\Phi)\right\} + \nabla\cdot\left\{\rho_n(e_n+\Phi)\mathbf{u}_n + \Big(\overset{\boxed{n}}{\mathbb{W}} + \sum_{\mu=0}^{n-1}\rho_\mu\overset{\boxed{n-\mu}}{e''_\mu\mathbf{u}''_\mu}\Big)\right\} = \qquad (14)$$

$$= -p_n\nabla\cdot\mathbf{u}_n + \nabla\mathbf{u}_n\cdot\cdot\overset{\boxed{n}}{\mathbb{F}} + \rho_n\mathbf{u}_n\cdot\nabla\Phi -$$

$$-\sum_{\mu=0}^{n-1}p_\mu\overset{\boxed{n-\mu}}{\nabla\cdot\mathbf{u}''_\mu} + \sum_{\mu=0}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{\nabla\mathbf{u}''_\mu\cdot\cdot\overset{\boxed{\mu}}{\mathbb{F}}}$$

Gegenüber den ungefilterten Gleichungen zeigt (12) als einzigen Unterschied eine Kaskade von additiven "turbulenten" Reibungstensoren, (13) bleibt unberührt von jeder Filterung der beschriebenen Art und (14) zeigt neben einer Kaskade von additiven "turbulenten" Transporten von innerer Energie noch derartige Kaskaden bei der Expansionsarbeit und bei der Energiedissipation. Diese kaskadenartig auftretenden zusätzlichen Terme spielen ihre Hauptrolle in der Energetik des folgenden Kapitels.

## 3 DAS SYSTEM DER ZUGEHÖRIGEN DYNAMISCHEN ENERGIEGLEICHUNGEN

Bei der Anwendung der mehrfach gemittelten Standardgleichung (11) auf den Fall, daß es sich bei der Eigenschaft A um die kinetische Energie handelt, ist zu beachten, daß A dann eine nichtlineare Eigenschaft ist, für welche abweichend von (9) gilt:

$$\overline{\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2}} = \bar{\rho}\,\frac{\hat{\mathbf{u}}^2}{2} + \overline{\rho\frac{\mathbf{u}''^2}{2}} = \rho_1\frac{\mathbf{u}_1^2}{2} + \overline{\rho\frac{\mathbf{u}''^2}{2}}$$

$$\overline{\overline{\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2}}} = \bar{\rho}_1\frac{\hat{\mathbf{u}}_1^2}{2} + \overline{\rho_1\frac{\mathbf{u}_1''^2}{2}} + \overline{\overline{\rho\frac{\mathbf{u}''^2}{2}}} = \rho_2\frac{\mathbf{u}_2^2}{2} + \overline{\rho_1\frac{\mathbf{u}_1''^2}{2}} + \overline{\overline{\rho\frac{\mathbf{u}''^2}{2}}}$$

d.h.

(15)
$$\boxed{\overset{\boxed{n}}{\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2}} = \rho_n\frac{\mathbf{u}_n^2}{2} + \sum_{\mu=o}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu\frac{\mathbf{u}''^2_\mu}{2}}}$$

Nach n-facher Filterung der kinetischen Energie treten neben der kinetischen Energie der gefilterten Bewegung n zusätzliche additive "turbulente" kinetische Energien auf, für welche entsprechende Bilanzgleichungen gefunden und den Gleichungen (12) - (14) an die Seite gestellt werden müssen.

Zunächst werde die (5) entsprechende dynamische Energiegleichung gefiltert und dabei noch nicht von (15) Gebrauch gemacht. Die rechte Seite entspricht mit umgekehrtem Vorzeichen derjenigen von Gleichung (14). Auf der linken Seite erhält man zunächst

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\overset{\boxed{n}}{\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2}}\right\} + \nabla\cdot\left\{\overset{\boxed{n}}{\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2}\mathbf{u}} + (p_n\mathbb{E} - \overset{\boxed{n}}{\mathbb{F}})\cdot\mathbf{u}_n + \sum_{\mu=o}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{(p_\mu\mathbb{E} - \overset{\boxed{\mu}}{\mathbb{F}})\cdot\mathbf{u}''_\mu}\right\}$$

Hier läßt sich (15) einführen und dazu der gefilterte konvektive Transport von kinetischer Energie wie folgt darstellen: Zunächst ist wie vorher (vor Formel (12))

$$\overset{\boxed{n}}{\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2}\mathbf{u}} = \overset{\boxed{n}}{\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2}}\mathbf{u}_n + \sum_{\mu=o}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{\overset{\boxed{n}}{\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2}}\mathbf{u}''_\mu}$$

$$= \overset{\boxed{n}}{\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2}}\mathbf{u}_n + \sum_{\mu=o}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu\frac{\mathbf{u}_\mu^2}{2}\mathbf{u}''_\mu} + \sum_{\mu=o}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{(\overset{\boxed{\mu}}{\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2}} - \rho_\mu\frac{\mathbf{u}_\mu^2}{2})\mathbf{u}''_\mu}$$

$$\overset{\boxed{n}}{\rho \frac{\mathfrak{u}^2}{2}\,\mathfrak{u}} = \overset{\boxed{n}}{\rho \frac{\mathfrak{u}^2}{2}}\,\mathfrak{u}_n + \sum_{\mu=o}^{n-1} \overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu \frac{\mathfrak{u}_\mu^2}{2}}\,\mathfrak{u}''_\mu + \sum_{\mu=o}^{n-1} \overset{\boxed{n-\mu}}{\Big( \sum_{\sigma=o}^{\mu-1} \overset{\boxed{\mu-\sigma}}{\rho_\sigma \frac{\mathfrak{u}''^2_\sigma}{2}} \Big)}\mathfrak{u}''_\mu$$

$$= \overset{\boxed{n}}{\rho \frac{\mathfrak{u}^2}{2}}\,\mathfrak{u}_n + \sum_{\mu=o}^{n-1} \overset{\boxed{n-\mu}}{\frac{1}{2}\rho_\mu (\mathfrak{u}_\mu^2 - \mathfrak{u}''^2_\mu)}\mathfrak{u}''_\mu + \sum_{\mu=o}^{n-1} \overset{\boxed{n-\mu}}{\Big( \sum_{\sigma=o}^{\mu} \overset{\boxed{\mu-\sigma}}{\rho_\sigma \frac{\mathfrak{u}''^2_\sigma}{2}} \Big)}\mathfrak{u}''_\mu$$

Beachtet man nun, daß $\mathfrak{u}_\mu = \mathfrak{u}_{\mu+1} + \mathfrak{u}''_\mu$ ist, dann wird aus der ersten Summe der rechten Seite wegen

$$\mathfrak{u}_\mu^2 - \mathfrak{u}''^2_\mu = \mathfrak{u}^2_{\mu+1} + 2\mathfrak{u}''_\mu \cdot \mathfrak{u}_{\mu+1}$$

$$\sum_{\mu=o}^{n-1} \overset{\boxed{n-\mu}}{\frac{1}{2}\rho_\mu (\mathfrak{u}_\mu^2 - \mathfrak{u}''^2_\mu)}\mathfrak{u}''_\mu = \sum_{\mu=o}^{n-1} \Big( \overset{\boxed{n-\mu-1}}{\overline{\rho_\mu \mathfrak{u}''_\mu}\,\frac{\mathfrak{u}^2_{\mu+1}}{2}} + \overset{\boxed{n-\mu-1}}{\overline{\rho_\mu \mathfrak{u}''_\mu \mathfrak{u}''_\mu} \cdot \mathfrak{u}_{\mu+1}} \Big)$$

$$= \sum_{\mu=o}^{n-1} \overset{\boxed{n-\mu-1}}{\overline{\rho_\mu \mathfrak{u}''_\mu \mathfrak{u}''_\mu} \cdot \mathfrak{u}_{\mu+1}}$$

$$= \sum_{\mu=o}^{n-1} \overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu \mathfrak{u}''_\mu \mathfrak{u}''_\mu} \cdot \mathfrak{u}_n + \sum_{\mu=o}^{n-1} \overset{\boxed{n-\mu}}{\Big( \sum_{\sigma=o}^{\mu} \overset{\boxed{\mu-\sigma}}{\rho_\sigma \mathfrak{u}''_\sigma \mathfrak{u}''_\sigma} - \rho_\mu \mathfrak{u}''_\mu \mathfrak{u}''_\mu \Big)} \cdot \mathfrak{u}''_\mu$$

wobei die Terme der Summe so umarrangiert wurden, daß $\mathfrak{u}_n$ explizit auftritt. Somit erhält man endgültig

$$\boxed{\begin{aligned} \overset{\boxed{n}}{\rho \frac{\mathfrak{u}^2}{2}\,\mathfrak{u}} = \overset{\boxed{n}}{\rho \frac{\mathfrak{u}^2}{2}}\,\mathfrak{u}_n &+ \sum_{\mu=o}^{n-1} \overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu \mathfrak{u}''_\mu \mathfrak{u}''_\mu} \cdot \mathfrak{u}_n + \sum_{\mu=o}^{n-1} \overset{\boxed{n-\mu}}{\Big( \sum_{\sigma=o}^{\mu} \overset{\boxed{\mu-\sigma}}{\rho_\sigma \mathfrak{u}''_\sigma \mathfrak{u}''_\sigma} - \rho_\mu \mathfrak{u}''_\mu \mathfrak{u}''_\mu \Big)} \cdot \mathfrak{u}''_\mu + \\ &+ \sum_{\mu=o}^{n-1} \overset{\boxed{n-\mu}}{\Big( \sum_{\sigma=o}^{\mu} \overset{\boxed{\mu-\sigma}}{\rho_\sigma \frac{\mathfrak{u}''^2_\sigma}{2}} \Big)}\mathfrak{u}''_\mu \end{aligned}} \qquad (16)$$

Nun kann die gefilterte dynamische Energiegleichung (5) explizit niedergeschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
(17)\qquad & \frac{\partial}{\partial t}\overline{\left\{\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right\}}^{\boxed{n}} + \nabla\cdot\left\{\overline{\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2}}^{\boxed{n}}\mathbf{u}_n + p_n\mathbf{u}_n - \Big(\overline{\mathbb{F}}^{\boxed{n}} - \sum_{\mu=0}^{n-1}\rho_\mu\overline{\mathbf{u}''_\mu\mathbf{u}''_\mu}^{\boxed{n-\mu}}\Big)\cdot\mathbf{u}_n + \right.\\
& + \sum_{\mu=0}^{n-1}\overline{p_\mu\mathbf{u}''_\mu}^{\boxed{n-\mu}} - \sum_{\mu=0}^{n-1}\overline{\Big(\overline{\mathbb{F}}^{\boxed{\mu}} - \sum_{\sigma=0}^{\mu}\rho_\sigma\overline{\mathbf{u}''_\sigma\mathbf{u}''_\sigma}^{\boxed{\mu-\sigma}}\Big)\cdot\mathbf{u}''_\mu}^{\boxed{n-\mu}} + \\
& \left. + \sum_{\mu=0}^{n-1}\overline{\Big(\sum_{\sigma=0}^{\mu}\rho_\sigma\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_\sigma}{2}}^{\boxed{\mu-\sigma}} - \rho\mathbf{u}''^2_\mu\Big)\mathbf{u}''_\mu}^{\boxed{n-\mu}}\right\} = \\
& = p_n\nabla\cdot\mathbf{u}_n - \nabla\mathbf{u}_n\cdot\cdot\,\overline{\mathbb{F}}^{\boxed{n}} - \rho_n\mathbf{u}_n\cdot\nabla\Phi + \\
& + \sum_{\mu=0}^{n-1}\overline{p_\mu\nabla\cdot\mathbf{u}''_\mu}^{\boxed{n-\mu}} - \sum_{\mu=0}^{n-1}\overline{\nabla\mathbf{u}''_\mu\cdot\cdot\,\overline{\mathbb{F}}^{\boxed{\mu}}}^{\boxed{n-\mu}}
\end{aligned}
$$

Dieser Gleichung für die gefilterte gesamte kinetische Energie wird nun die dynamische Energiegleichung der gefilterten Bewegung zur Seite gestellt, welche sich aus der gefilterten Bewegungsgleichung (12) nach skalarer Multiplikation mit $\mathbf{u}_n$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
(18)\qquad & \frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_n\frac{\mathbf{u}_n^2}{2}\right\} + \nabla\cdot\left\{\rho_n\frac{\mathbf{u}_n^2}{2}\mathbf{u}_n + p_n\mathbf{u}_n - \Big(\overline{\mathbb{F}}^{\boxed{n}} - \sum_{\mu=0}^{n-1}\rho_\mu\overline{\mathbf{u}''_\mu\mathbf{u}''_\mu}^{\boxed{n-\mu}}\Big)\cdot\mathbf{u}_n\right\} = \\
& = p_n\nabla\cdot\mathbf{u}_n - \nabla\mathbf{u}_n\cdot\cdot\,\overline{\mathbb{F}}^{\boxed{n}} - \rho_n\mathbf{u}_n\cdot\nabla\Phi + \nabla\mathbf{u}_n\cdot\cdot\sum_{\mu=0}^{n-1}\rho_\mu\overline{\mathbf{u}''_\mu\mathbf{u}''_\mu}^{\boxed{n-\mu}}
\end{aligned}
$$

Es ist nun leicht, unter Verwendung von (15) eine Gleichung für die Summe der "turbulenten" kinetischen Energien zu finden, indem einfach (18) von (17) subtrahiert wird. Es ergibt sich, ausführlich geschrieben:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_{\mu=0}^{n-1}\rho_\mu\,\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_\mu}{2}}^{\,n-\mu}\right\}+\nabla\cdot\left\{\left(\sum_{\mu=0}^{n-1}\rho_\mu\,\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_\mu}{2}}^{\,n-\mu}\right)\mathbf{u}_n+\sum_{\mu=0}^{n-1}\overline{p_\mu\mathbf{u}''_\mu}^{\,n-\mu}-\right.\\
&\left.-\sum_{\mu=0}^{n-1}\overline{\left(\overline{\mathbb{F}}^{\,\mu}-\sum_{\sigma=0}^{\mu}\rho_\sigma\,\overline{\mathbf{u}''_\sigma\mathbf{u}''_\sigma}^{\,\mu-\sigma}\right)\cdot\mathbf{u}''_\mu}^{\,n-\mu}+\sum_{\mu=0}^{n-1}\overline{\left(\sum_{\sigma=0}^{\mu}\rho_\sigma\,\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_\sigma}{2}}^{\,\mu-\sigma}-\rho_\mu\mathbf{u}''^2_\mu\right)\mathbf{u}''_\mu}^{\,n-\mu}\right\}=\\
&=-\nabla\mathbf{u}_n\cdot\cdot\sum_{\mu=0}^{n-1}\rho_\mu\,\overline{\mathbf{u}''_\mu\mathbf{u}''_\mu}^{\,n-\mu}+\sum_{\mu=0}^{n-1}\overline{p_\mu\nabla\cdot\mathbf{u}''_\mu}^{\,n-\mu}-\overline{\sum_{\mu=0}^{n-1}\nabla\mathbf{u}''_\mu\cdot\cdot\overline{\mathbb{F}}^{\,\mu}}^{\,n-\mu}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Addiert man die Gleichungen (14) und (17), dann erhält man die Gleichung für die gefilterte Gesamtenergie, d.h. für

$$\overline{\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2}+\rho_n(e_n+\Phi)}^{\,n} \quad ,$$

welches eine Gleichung vom Typ des Erhaltungssatzes

$$\frac{\partial\rho A}{\partial t}+\nabla\cdot\left\{\rho\mathbf{u}A+\mathbb{B}\right\}=0$$

ist, da sich die Quellfunktion der gefilterten Gesamtenergie zu Null ergibt.

Es verbleibt nun nur noch die Aufgabe, Gleichungen für die einzelnen Anteile der Summe der "turbulenten" kinetischen Energien aufzustellen, d.h. Gleichungen für

$$\overline{\rho_\mu\frac{\mathbf{u}''^2_\mu}{2}}^{\,n-\mu} \quad : \quad \mu=0,1,2,\dots,n-1 \ .$$

Dazu schreibt man zunächst (18) für den Index $\mu$ und führt die $\mu+1$ -te Filterung unter Beachtung von (15) und (16) durch:

Mit
$$\overline{\rho_\mu\frac{\mathbf{u}^2_\mu}{2}}=\rho_{\mu+1}\frac{\mathbf{u}^2_{\mu+1}}{2}+\rho_\mu\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_\mu}{2}}$$

$$\overline{\rho\frac{\mathbf{u}^2_\mu}{2}\mathbf{u}_\mu}=\overline{\rho\frac{\mathbf{u}^2_\mu}{2}}\,\mathbf{u}_{\mu+1}+\overline{\rho_\mu\mathbf{u}''_\mu\mathbf{u}''_\mu}\cdot\mathbf{u}_{\mu+1}+\overline{\rho_\mu\frac{\mathbf{u}''^2_\mu}{2}\mathbf{u}''_\mu}$$

erhält man ausführlich geschrieben

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_{\mu+1}\frac{\mathbf{u}_{\mu+1}^2}{2}+\overline{\rho_\mu\frac{\mathbf{u}''^2_\mu}{2}}\right\}+\nabla\cdot\left\{\rho_{\mu+1}\frac{\mathbf{u}^2_{\mu+1}}{2}\mathbf{u}_{\mu+1}+p_{\mu+1}\mathbf{u}_{\mu+1}-\left(\overset{\boxed{\mu+1}}{\mathbb{F}}-\sum_{\sigma=o}^{\mu-1}\overset{\boxed{\mu+1-\sigma}}{\rho_\sigma\mathbf{u}''_\sigma\mathbf{u}''_\sigma}\right)\cdot\mathbf{u}_{\mu+1}+\right.$$

$$\left.+\overline{\rho_\mu\frac{\mathbf{u}''^2_\mu}{2}}\mathbf{u}_{\mu+1}+\overline{p_\mu\mathbf{u}''_\mu}-\overline{\left(\overset{\boxed{\mu}}{\mathbb{F}}-\sum_{\sigma=o}^{\mu-1}\overset{\boxed{\mu-\sigma}}{\rho_\sigma\mathbf{u}''_\sigma\mathbf{u}''_\sigma}\right)\cdot\mathbf{u}''_\mu}+\overline{\rho_\mu\mathbf{u}''_\mu\mathbf{u}''_\mu}\cdot\mathbf{u}_{\mu+1}+\overline{\rho_\mu\frac{\mathbf{u}''^2_\mu}{2}\mathbf{u}''_\mu}\right\}=$$

$$=p_{\mu+1}\nabla\cdot\mathbf{u}_{\mu+1}-\nabla\mathbf{u}_{\mu+1}\cdot\cdot\overset{\boxed{\mu+1}}{\mathbb{F}}-\rho_{\mu+1}\mathbf{u}_{\mu+1}\cdot\nabla\Phi+\nabla\mathbf{u}_{\mu+1}\cdot\cdot\sum_{\sigma=o}^{\mu-1}\overset{\boxed{\mu+1-\sigma}}{\rho_\sigma\mathbf{u}''_\sigma\mathbf{u}''_\sigma}+$$

$$+\overline{p_\mu\nabla\cdot\mathbf{u}''_\mu}\quad-\overline{\nabla\mathbf{u}''_\mu\cdot\cdot\cdot\overset{\boxed{\mu}}{\mathbb{F}}}\quad+\overline{\nabla\mathbf{u}''_\mu\cdot\cdot\sum_{\sigma=o}^{\mu-1}\overset{\boxed{\mu-\sigma}}{\rho_\sigma\mathbf{u}''_\sigma\mathbf{u}''_\sigma}}$$

Hiervon wird nun (18), angeschrieben für den Index $\mu+1$ , subtrahiert, wobei in Hinblick auf die vorstehende Gleichung für zwei $\sigma=o\ldots\sigma=\mu$ -Summen eine $\sigma=o\ldots\sigma=\mu-1$ -Summe und ein extra $\mu$-Summand geschrieben wird.

Es ist (18) für $n=\mu+1$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_{\mu+1}\frac{\mathbf{u}^2_{\mu+1}}{2}\right\}+\nabla\cdot\left\{\rho_{\mu+1}\frac{\mathbf{u}^2_{\mu+1}}{2}\mathbf{u}_{\mu+1}+p_{\mu+1}\mathbf{u}_{\mu+1}-\left(\overset{\boxed{\mu+1}}{\mathbb{F}}-\sum_{\sigma=o}^{\mu-1}\overset{\boxed{\mu+1-\sigma}}{\rho_\sigma\mathbf{u}''_\sigma\mathbf{u}''_\sigma}\right)\cdot\mathbf{u}_{\mu+1}+\right.$$

$$\left.+\overline{\rho_\mu\mathbf{u}''_\mu\mathbf{u}''_\mu}\cdot\mathbf{u}_{\mu+1}\right\}=$$

$$=p_{\mu+1}\nabla\cdot\mathbf{u}_{\mu+1}-\nabla\mathbf{u}_{\mu+1}\cdot\cdot\overset{\boxed{\mu+1}}{\mathbb{F}}-\rho_{\mu+1}\mathbf{u}_{\mu+1}\cdot\nabla\Phi+\nabla\mathbf{u}_{\mu+1}\cdot\cdot\sum_{\sigma=o}^{\mu-1}\overset{\boxed{\mu+1-\sigma}}{\rho_\sigma\mathbf{u}''_\sigma\mathbf{u}''_\sigma}+\nabla\mathbf{u}_{\mu+1}\cdot\cdot\overline{\rho_\mu\mathbf{u}''_\mu\mathbf{u}''_\mu}$$

Subtraktion der beiden vorstehenden Gleichungen liefert dann

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\overline{\rho_\mu\frac{\mathbf{u}''^2_\mu}{2}}\right\}+\nabla\cdot\left\{\overline{\rho_\mu\frac{\mathbf{u}''^2_\mu}{2}}\mathbf{u}_{\mu+1}+\overline{p_\mu\mathbf{u}''_\mu}-\overline{\left(\overset{\boxed{\mu}}{\mathbb{F}}-\sum_{\sigma=o}^{\mu-1}\overset{\boxed{\mu-\sigma}}{\rho_\sigma\mathbf{u}''_\sigma\mathbf{u}''_\sigma}\right)\cdot\mathbf{u}''_\mu}+\overline{\rho_\mu\frac{\mathbf{u}''^2_\mu}{2}\mathbf{u}''_\mu}\right\}=\\&\qquad=-\nabla\mathbf{u}_{\mu+1}\cdot\cdot\overline{\rho_\mu\mathbf{u}''_\mu\mathbf{u}''_\mu}+\overline{p_\mu\nabla\cdot\mathbf{u}''_\mu}-\overline{\nabla\mathbf{u}''_\mu\cdot\cdot\overset{\boxed{\mu}}{\mathbb{F}}}+\overline{\nabla\mathbf{u}''_\mu\cdot\cdot\sum_{\sigma=o}^{\mu-1}\overset{\boxed{\mu-\sigma}}{\rho_\sigma\mathbf{u}''_\sigma\mathbf{u}''_\sigma}}\end{aligned}}\tag{2o}$$

Nun verbleibt nur noch die $n-\mu-1$ -fach durchzuführende Filterung, um eine Darstellung für alle $n$ "turbulenten" kinetischen Energien zu finden. Dazu ist nur zu berechnen:

$$\overset{\boxed{n-\mu-1}}{\rho_\mu \frac{\mathfrak{u}''^2_\mu}{2}\mathfrak{u}_{\mu+1}} \qquad \text{und} \qquad \overset{\boxed{n-\mu-1}}{\nabla\mathfrak{u}_{\mu+1}\cdot\cdot\rho_\mu\mathfrak{u}''_\mu\mathfrak{u}''_\mu}$$

Es ist

$$\overset{\boxed{n-\mu-1}}{\rho_\mu \frac{\mathfrak{u}''^2_\mu}{2}\mathfrak{u}_{\mu+1}} = \overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu \frac{\mathfrak{u}''^2_\mu}{2}\mathfrak{u}_n} + \sum_{\sigma=1}^{n-\mu-1} \overset{\boxed{n-\mu-\sigma}}{\overset{\boxed{\sigma}}{\rho_\mu \frac{\mathfrak{u}''^2_\mu}{2}\mathfrak{u}''_{\mu+\sigma}}}$$

$$\overset{\boxed{n-\mu-1}}{\nabla\mathfrak{u}_{\mu+1}\cdot\cdot\rho_\mu\mathfrak{u}''_\mu\mathfrak{u}''_\mu} = \overset{\boxed{n-\mu}}{\nabla\mathfrak{u}_n\cdot\cdot\rho_\mu\mathfrak{u}''_\mu\mathfrak{u}''_\mu} + \sum_{\sigma=1}^{n-\mu-1}\overset{\boxed{n-\mu-\sigma}}{\nabla\mathfrak{u}''_{\mu+\sigma}\cdot\cdot\overset{\boxed{\sigma}}{\rho_\mu\mathfrak{u}''_\mu\mathfrak{u}''_\mu}}$$

Damit ist man nun in die Lage versetzt, die Bilanzgleichungen für alle "turbulenten" kinetischen Energien aus einer einzigen Gleichung herleiten zu können. Diese schreibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left\{\overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu\frac{\mathfrak{u}''^2_\mu}{2}}\right\} + \nabla\cdot\left\{\overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu\frac{\mathfrak{u}''^2_\mu}{2}\mathfrak{u}_n} + \overset{\boxed{n-\mu}}{p_\mu\mathfrak{u}''_\mu} - \overset{\boxed{n-\mu}}{(\overset{\boxed{\mu}}{\mathbb{F}} - \sum_{\sigma=0}^{\mu-1}\overset{\boxed{\mu-\sigma}}{\rho_\sigma\mathfrak{u}''_\sigma\mathfrak{u}''_\sigma})\cdot\mathfrak{u}''_\mu} + \sum_{\sigma=0}^{n-\mu-1}\overset{\boxed{n-\mu-\sigma}}{\overset{\boxed{\sigma}}{\rho_\mu\frac{\mathfrak{u}''^2_\mu}{2}\mathfrak{u}''_{\mu+\sigma}}}\right\} \\ &= -\overset{\boxed{n-\mu}}{\nabla\mathfrak{u}_n\cdot\cdot\rho_\mu\mathfrak{u}''_\mu\mathfrak{u}''_\mu} + \overset{\boxed{n-\mu}}{p_\mu\nabla\cdot\mathfrak{u}''_\mu} - \overset{\boxed{n-\mu}}{\nabla\mathfrak{u}''_\mu\cdot\cdot\overset{\boxed{\mu}}{\mathbb{F}}} + \overset{\boxed{n-\mu}}{\nabla\mathfrak{u}''_\mu\cdot\cdot\sum_{\sigma=0}^{\mu-1}\overset{\boxed{\mu-\sigma}}{\rho_\sigma\mathfrak{u}''_\sigma\mathfrak{u}''_\sigma}} - \sum_{\sigma=1}^{n-\mu-1}\overset{\boxed{n-\mu-\sigma}}{\nabla\mathfrak{u}''_{\mu+\sigma}\cdot\cdot\overset{\boxed{\sigma}}{\rho_\mu\mathfrak{u}''_\mu\mathfrak{u}''_\mu}}\end{aligned}} \quad (21)$$

Addiert man dieses für $\mu = o, 1, 2, \ldots, n-1$ hingeschriebene Gleichungs-system, dann kommt man genau auf (19) zurück, da sich zeigen läßt, daß

$$\sum_{\mu=o}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{\nabla\mathfrak{u}''_\mu\cdot\cdot\sum_{\sigma=o}^{\mu-1}\overset{\boxed{\mu-\sigma}}{\rho_\sigma\mathfrak{u}''_\sigma\mathfrak{u}''_\sigma}} - \sum_{\mu=o}^{n-1}\sum_{\sigma=1}^{n-\mu-1}\overset{\boxed{n-\mu-\sigma}}{\nabla\mathfrak{u}''_{\mu+\sigma}\cdot\cdot\overset{\boxed{\sigma}}{\rho_\mu\mathfrak{u}''_\mu\mathfrak{u}''_\mu}} = o \quad ,$$

und daß außerdem

$$\sum_{\mu=o}^{n-1}\sum_{\sigma=o}^{n-\mu-1}\overset{\boxed{n-\mu-\sigma}}{\overset{\boxed{\sigma}}{\rho_\mu\frac{\mathfrak{u}''^2_\mu}{2}\mathfrak{u}''_{\mu+\sigma}}} = \sum_{\mu=o}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{(\overset{\boxed{\mu-\sigma}}{\sum_{\sigma=o}^{\mu}\rho_\sigma\frac{\mathfrak{u}''^2_\sigma}{2}})\mathfrak{u}''_\mu} \quad .$$

Gleichungen (14) und (18) zusammen mit den n Gleichungen (21) bilden die Grundlage der Energetik und gestatten, sich einen Überblick über die "internen" Übergänge von einer Energieform zu einer anderen zu verschaffen. Dies geschieht mit Hilfe der räumlichen Quellfunktionen, welche nochmals zusammengestellt werden sollen:

$$Q\left\{\rho_n(e_n+\Phi)\right\} = -p_n\nabla\cdot\mathfrak{u}_n + \nabla\mathfrak{u}_n\cdot\cdot\overset{\boxed{\mu}}{\mathbb{F}} + \rho_n\mathfrak{u}_n\cdot\nabla\Phi - \sum_{\mu=o}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{p_\mu\nabla\cdot\mathfrak{u}''_\mu} + \sum_{\mu=o}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{\nabla\mathfrak{u}''_\mu\cdot\cdot\overset{\boxed{\mu}}{\mathbb{F}}}$$

$$Q\left\{\rho_n\frac{\mathfrak{u}_n^2}{2}\right\} = p_n\nabla\cdot\mathfrak{u}_n - \nabla\mathfrak{u}_n\cdot\cdot\overset{\boxed{\mu}}{\mathbb{F}} - \rho_n\mathfrak{u}_n\cdot\nabla\Phi + \nabla\mathfrak{u}_n\cdot\cdot\sum_{\mu=o}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu\mathfrak{u}''_\mu\mathfrak{u}''_\mu}$$

(22)

$$Q_\mu\left\{\overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu\frac{\mathfrak{u}''^2_\mu}{2}}\right\} = \overset{\boxed{n-\mu}}{p_\mu\nabla\cdot\mathfrak{u}''_\mu} - \overset{\boxed{n-\mu}}{\nabla\mathfrak{u}''_\mu\cdot\cdot\overset{\boxed{\mu}}{\mathbb{F}}} - \nabla\mathfrak{u}_n\cdot\cdot\overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu\mathfrak{u}''_\mu\mathfrak{u}''_\mu} + \overset{\boxed{n-\mu}}{\nabla\mathfrak{u}''_\mu\cdot\cdot\sum_{\sigma=o}^{\mu-1}\overset{\boxed{\mu-\sigma}}{\rho_\sigma\mathfrak{u}''_\sigma\mathfrak{u}''_\sigma}} - \sum_{\sigma=1}^{n-\mu-1}\overset{\boxed{n-\mu-\sigma}}{\nabla\mathfrak{u}''_{\mu+\sigma}\cdot\cdot\overset{\boxed{\sigma}}{\rho_\mu\mathfrak{u}''_\mu\mathfrak{u}''_\mu}}$$

Man erkennt unmittelbar, daß die Quellfunktion der Gesamtenergie verschwindet:

$$Q\left\{\rho_n\frac{\mathfrak{u}_n^2}{2} + \sum_{\mu=o}^{n-1}\overset{\boxed{n-\mu}}{\rho_\mu\frac{\mathfrak{u}''^2_\mu}{2}} + \rho_n(e_n+\Phi)\right\} = o$$

und außerdem, welche Energieanteile zwischen den verschiedenen Energieformen ausgetauscht werden.

Zur Belebung der sehr allgemeinen und abstrakten Formeln soll im folgenden der Fall $n=4$ explizit hingeschrieben werden. Dieser Fall spielte in [1] eine gewisse Rolle.

Die Gleichungen (12) bis (14) sind in ihrer Struktur so einfach, daß sich der Fall $n=4$ sofort hinschreiben läßt. Das Gleiche gilt aber auch für (18). Nur für die vier Gleichungen (21) ($\mu=o,1,2,3$) schreiben wir deshalb das folgende System an:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\overline{\overline{\overline{\rho\frac{\mathfrak{u}''^2}{2}}}}\right\} + \nabla\cdot\left\{\overline{\overline{\overline{\rho\frac{\mathfrak{u}''^2}{2}}}}\,\mathfrak{u}_4 + \overline{\overline{\overline{p\mathfrak{u}''}}} - \overline{\overline{\overline{\mathbb{F}\cdot\mathfrak{u}''}}} + \overline{\overline{\overline{\rho\frac{\mathfrak{u}''^2}{2}\mathfrak{u}''}}} + \overline{\overline{\overline{\rho\frac{\mathfrak{u}''^2}{2}}}\,\mathfrak{u}''_1} + \overline{\overline{\overline{\rho\frac{\mathfrak{u}''^2}{2}}\,\mathfrak{u}''_2}} +\right.$$

(23)

$$\left. + \overline{\overline{\rho\frac{\mathfrak{u}''^2}{2}}\,\mathfrak{u}''_3}\right\} = Q\left\{\overline{\overline{\overline{\rho\frac{\mathfrak{u}''^2}{2}}}}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_1 \overline{\overline{\overline{\frac{\mathfrak{u}_1''^2}{2}}}}\right\} + \nabla\cdot\left\{\rho_1 \overline{\overline{\overline{\frac{\mathfrak{u}_1''^2}{2}}}}\,\mathfrak{u}_4 + \overline{\overline{\overline{p_1\mathfrak{u}_1''}}} - \overline{\overline{\overline{(\mathbb{F} - \overline{\rho\mathfrak{u}''\mathfrak{u}''})\cdot\mathfrak{u}_1''}}} + \rho_1 \overline{\overline{\overline{\frac{\mathfrak{u}_1''^2}{2}\,\mathfrak{u}_1''}}} + \rho_1 \overline{\overline{\overline{\frac{\mathfrak{u}_1''^2}{2}\,\mathfrak{u}_2''}}} + \rho_1 \overline{\overline{\overline{\frac{\mathfrak{u}_1''^2}{2}\,\mathfrak{u}_3''}}}\right\} = Q\left\{\rho_1 \overline{\overline{\overline{\frac{\mathfrak{u}_1''^2}{2}}}}\right\} \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_2 \overline{\overline{\frac{\mathfrak{u}_2''^2}{2}}}\right\} + \nabla\cdot\left\{\rho_2 \overline{\overline{\frac{\mathfrak{u}_2''^2}{2}}}\,\mathfrak{u}_4 + \overline{\overline{p_2\mathfrak{u}_2''}} - \overline{\overline{(\overline{\overline{\mathbb{F}}} - \overline{\overline{\rho\mathfrak{u}''\mathfrak{u}''}} - \overline{\rho_1\mathfrak{u}_1''\mathfrak{u}_1''})\cdot\mathfrak{u}_2''}} + \rho_2 \overline{\overline{\frac{\mathfrak{u}_2''^2}{2}\,\mathfrak{u}_2''}} + \rho_2 \overline{\overline{\frac{\mathfrak{u}_2''^2}{2}\,\mathfrak{u}_3''}}\right\} = Q\left\{\rho_2 \overline{\overline{\frac{\mathfrak{u}_2''^2}{2}}}\right\} \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_3 \overline{\frac{\mathfrak{u}_3''^2}{2}}\right\} + \nabla\cdot\left\{\rho_3 \overline{\frac{\mathfrak{u}_3''^2}{2}}\,\mathfrak{u}_4 + \overline{p_3\mathfrak{u}_3''} - \overline{(\overline{\overline{\overline{\mathbb{F}}}} - \overline{\overline{\overline{\rho\mathfrak{u}''\mathfrak{u}''}}} - \overline{\overline{\rho_1\mathfrak{u}_1''\mathfrak{u}_1''}} - \overline{\rho_2\mathfrak{u}_2''\mathfrak{u}_2''})\cdot\mathfrak{u}_3''} + \rho_3 \overline{\frac{\mathfrak{u}_3''^2}{2}\,\mathfrak{u}_3''}\right\} = Q\left\{\rho_3 \overline{\frac{\mathfrak{u}_3''^2}{2}}\right\} \tag{26}$$

Das gesamte System von "Quellfunktionen" wird für den vorliegenden Fall aus dem System (22) heraus entwickelt:

(27)

$$Q\left\{\rho_4(e_4+\Phi)\right\} =$$

$$= \rho_4 \mathfrak{u}_4 \cdot \nabla\Phi - p_4 \nabla\cdot\mathfrak{u}_4 + \nabla\mathfrak{u}_4 \cdot\cdot\, \overline{\overline{\overline{\overline{\mathbb{F}}}}} - \begin{cases} -\overline{\overline{\overline{\overline{p\nabla\cdot\mathfrak{u}''}}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{\nabla\mathfrak{u}''\cdot\cdot\mathbb{F}}}}} \\ -\overline{\overline{\overline{p_1\nabla\cdot\mathfrak{u}''_1}}} + \overline{\overline{\overline{\nabla\mathfrak{u}''_1\cdot\cdot\mathbb{F}}}} \\ -\overline{\overline{p_2\nabla\cdot\mathfrak{u}''_2}} + \overline{\overline{\nabla\mathfrak{u}''_2\cdot\cdot\mathbb{F}}} \\ \overline{p_3\nabla\cdot\mathfrak{u}''_3} + \overline{\nabla\mathfrak{u}''_3\cdot\cdot\mathbb{F}} \end{cases}$$

$$Q\left\{\rho_4 \frac{\mathfrak{u}_4^2}{2}\right\} =$$

$$= -\rho_4\mathfrak{u}_4\cdot\nabla\Phi + p_4\nabla\cdot\mathfrak{u}_4 - \nabla\mathfrak{u}_4\cdot\cdot\,\overline{\overline{\overline{\overline{\mathbb{F}}}}} \qquad + \nabla\mathfrak{u}_4\cdot\cdot\left(\overline{\overline{\overline{\overline{\rho\mathfrak{u}''\mathfrak{u}''}}}} + \overline{\overline{\overline{\rho_1\mathfrak{u}''_1\mathfrak{u}''_1}}} + \overline{\overline{\rho_2\mathfrak{u}''_2\mathfrak{u}''_2}} + \overline{\rho_3\mathfrak{u}''_3\mathfrak{u}''_3}\right)$$

$$\overline{Q\left\{\rho_3 \frac{\mathfrak{u}''^2_3}{2}\right\}} =$$

$$= \qquad \overline{p_3\nabla\cdot\mathfrak{u}''_3} - \overline{\nabla\mathfrak{u}''_3\cdot\cdot\mathbb{F}} \qquad - \nabla\mathfrak{u}_4\cdot\cdot\,\overline{\rho_3\mathfrak{u}''_3\mathfrak{u}''_3} \quad + Q_3(\text{Wechselw.})$$

$$\overline{\overline{Q\left\{\rho_2 \frac{\mathfrak{u}''^2_2}{2}\right\}}} = \qquad \overline{\overline{p_2\nabla\cdot\mathfrak{u}''_2}} - \overline{\overline{\nabla\mathfrak{u}''_2\cdot\cdot\mathbb{F}}} \qquad - \nabla\mathfrak{u}_4\cdot\cdot\,\overline{\overline{\rho_2\mathfrak{u}''_2\mathfrak{u}''_2}} \quad + Q_2(\text{Wechselw.})$$

$$\overline{\overline{\overline{Q\left\{\rho_1 \frac{\mathfrak{u}''^2_1}{2}\right\}}}} = \qquad \overline{\overline{\overline{p_1\nabla\cdot\mathfrak{u}''_1}}} - \overline{\overline{\overline{\nabla\mathfrak{u}''_1\cdot\cdot\mathbb{F}}}} \qquad - \nabla\mathfrak{u}_4\cdot\cdot\,\overline{\overline{\overline{\rho_1\mathfrak{u}''_1\mathfrak{u}''_1}}} \quad + Q_1(\text{Wechselw.})$$

$$\overline{\overline{\overline{\overline{Q\left\{\rho \frac{\mathfrak{u}''^2}{2}\right\}}}}} = \qquad \overline{\overline{\overline{\overline{p\nabla\cdot\mathfrak{u}''}}}} - \overline{\overline{\overline{\overline{\nabla\mathfrak{u}''\cdot\cdot\mathbb{F}}}}} - \nabla\mathfrak{u}_4\cdot\cdot\,\overline{\overline{\overline{\overline{\rho\mathfrak{u}''\mathfrak{u}''}}}} \quad + Q_o(\text{Wechselw.})$$

wobei die Quellfunktionen für die Wechselwirkungen der "turbulenten" Energien untereinander gegeben sind durch:

$$Q_3(\text{Wechselw.}) = \overline{\nabla\mathfrak{u}_3'' \cdot\cdot (\overline{\overline{\overline{\rho\mathfrak{u}''\mathfrak{u}''}}} + \overline{\overline{\rho_1\mathfrak{u}_1''\mathfrak{u}_1''}} + \overline{\rho_2\mathfrak{u}_2''\mathfrak{u}_2''})} \tag{28}$$

$$Q_2(\text{Wechselw.}) = -\overline{\nabla\mathfrak{u}_3'' \cdot\cdot \overline{\rho_2\mathfrak{u}_2''\mathfrak{u}_2''}} + \overline{\overline{\nabla\mathfrak{u}_2'' \cdot\cdot (\overline{\overline{\overline{\rho\mathfrak{u}''\mathfrak{u}''}}} + \overline{\overline{\rho_1\mathfrak{u}_1''\mathfrak{u}_1''}})}}$$

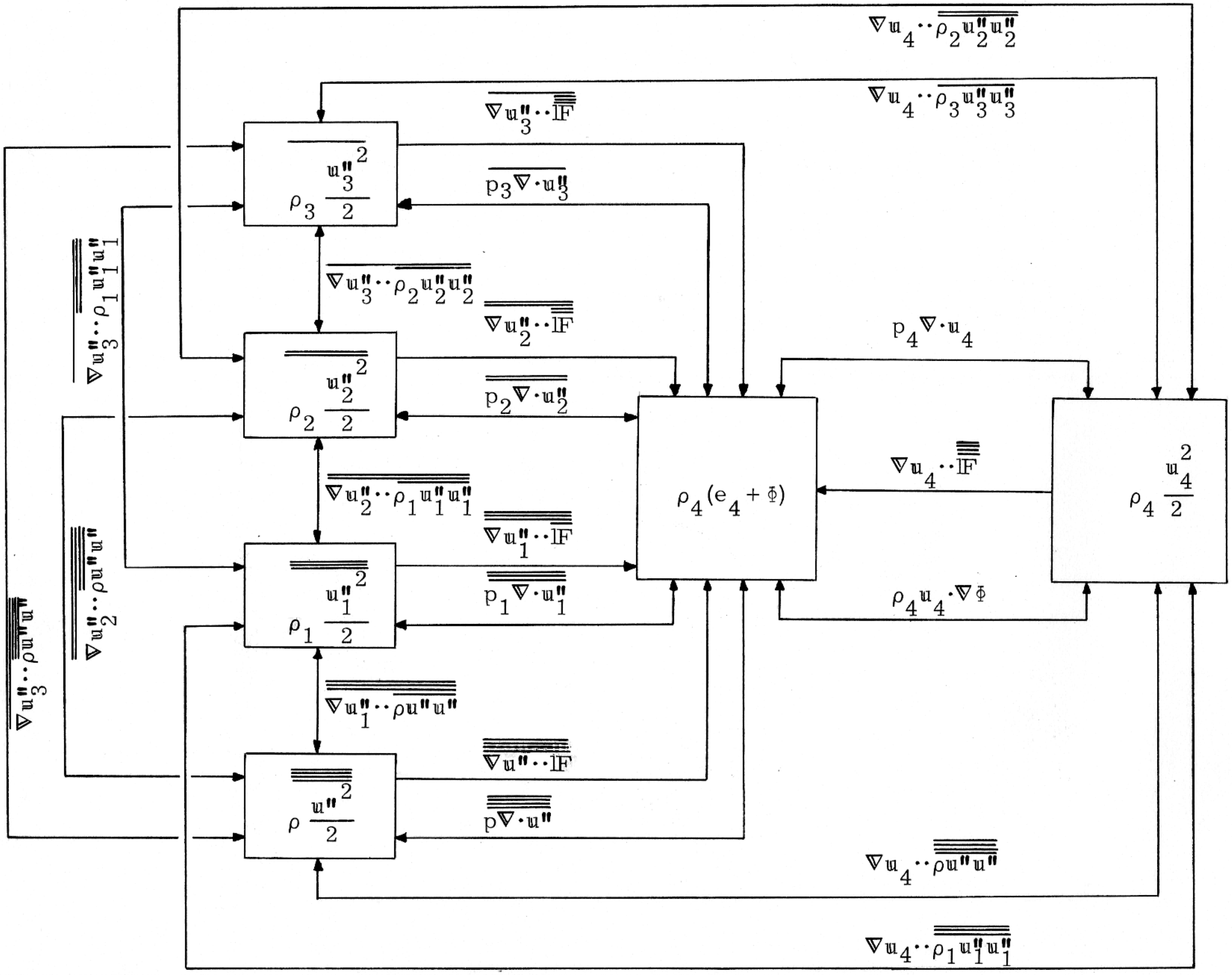
$$Q_1(\text{Wechselw.}) = -\overline{\nabla\mathfrak{u}_3'' \cdot\cdot \overline{\overline{\rho_1\mathfrak{u}_1''\mathfrak{u}_1''}}} - \overline{\overline{\nabla\mathfrak{u}_2'' \cdot\cdot \overline{\overline{\rho_1\mathfrak{u}_1''\mathfrak{u}_1''}}}} + \overline{\overline{\overline{\nabla\mathfrak{u}_1'' \cdot\cdot \overline{\overline{\overline{\rho\mathfrak{u}''\mathfrak{u}''}}}}}}$$

$$Q_o(\text{Wechselw.}) = -\overline{\nabla\mathfrak{u}_3'' \cdot\cdot \overline{\overline{\overline{\rho\mathfrak{u}''\mathfrak{u}''}}}} - \overline{\overline{\nabla\mathfrak{u}_2'' \cdot\cdot \overline{\overline{\overline{\rho\mathfrak{u}''\mathfrak{u}''}}}}} - \overline{\overline{\overline{\nabla\mathfrak{u}_1'' \cdot\cdot \overline{\overline{\overline{\rho\mathfrak{u}''\mathfrak{u}''}}}}}}$$

Man erkennt an (27) mit (28), daß sich bei Bildung der Gleichung für die Gesamtenergie alle Quellfunktionen gegenseitig wegheben und außerdem, wie die einzelnen Energieformen miteinander in Wechselwirkung stehen. Das folgende Energiediagramm veranschaulicht die Energieübergänge innerhalb des Systems. Die energetischen Kontakte mit der Umgebung, welche durch die Divergenzen von konvektiven und nichtkonvektiven Vektoren gegeben sind, sind leicht anschaulich zu deuten als Oberflächenleistungen und brauchen nicht extra diskutiert zu werden.

LITERATUR


[1] FORTAK, H. — Über einige mathematisch-physikalische Grundlagen der Theorie der allgemeinen atmosphärischen Zirkulation. Institut für Theoretische Meteorologie der FU Berlin, 1968



$\rho_3 \frac{\overline{u_3''^2}}{2}$
$\rho_2 \frac{\overline{u_2''^2}}{2}$
$\rho_1 \frac{\overline{u_1''^2}}{2}$
$\rho \frac{\overline{u''^2}}{2}$
$\rho_4(e_4+\Phi)$
$\rho_4 \frac{u_4^2}{2}$
$\nabla u_4 \cdot\cdot \overline{\rho_2 u_2'' u_2''}$
$\nabla u_4 \cdot\cdot \overline{\rho_3 u_3'' u_3''}$
$\overline{\nabla u_3'' \cdot\cdot \mathbb{F}}$
$\overline{p_3 \nabla \cdot u_3''}$
$\overline{\nabla u_3'' \cdot\cdot \overline{\rho_2 u_2'' u_2''}}$
$\overline{\nabla u_2'' \cdot\cdot \mathbb{F}}$
$\overline{p_2 \nabla \cdot u_2''}$
$\overline{\nabla u_2'' \cdot\cdot \overline{\rho_1 u_1'' u_1''}}$
$\overline{\nabla u_1'' \cdot\cdot \mathbb{F}}$
$\overline{p_1 \nabla \cdot u_1''}$
$\overline{\nabla u_1'' \cdot\cdot \overline{\rho u'' u''}}$
$\overline{\nabla u'' \cdot\cdot \mathbb{F}}$
$\overline{p \nabla \cdot u''}$
$p_4 \nabla \cdot u_4$
$\nabla u_4 \cdot\cdot \mathbb{F}$
$\rho_4 u_4 \cdot \nabla \Phi$
$\nabla u_4 \cdot\cdot \overline{\rho u'' u''}$
$\nabla u_4 \cdot\cdot \overline{\rho_1 u_1'' u_1''}$
$\overline{\nabla u_3'' \cdot\cdot \overline{\rho_1 u_1'' u_1''}}$
$\overline{\nabla u_2'' \cdot\cdot \overline{\rho u'' u''}}$
$\overline{\nabla u_3'' \cdot\cdot \overline{\rho u'' u''}}$