

Prinzipielle Grenzen der deterministischen Vorhersagbarkeit atmosphärischer Prozesse

Zusammenfassung

Nach einer Diskussion der Begriffe deterministische sowie stochastische Vorhersage wird aufgezeigt, welche speziellen Bedingungen in der Atmosphäre eine deterministische Vorhersage prinzipiell als unmöglich ausweisen. Ein Überblick und eine kurze Erörterung über die Entwicklung der Behandlung des Problems der Vorhersagbarkeit in der Meteorologie leiten dann über zu einer Diskussion moderner Konzepte der stochastischen Vorhersage, deren Grundgleichungen für den allgemeinen Fall dreidimensionaler atmosphärischer Bewegungsvorgänge angegeben und diskutiert werden.

Abstract

Following a general discussion on deterministic and stochastic prediction it is demonstrated which special conditions in the atmosphere make a deterministic prediction principally impossible. A review on the treatment of predictability in the meteorological literature is given, and modern concepts of stochastic dynamic prediction are described. The basic system of stochastic equations are derived and discussed for three-dimensional atmospheric motions.

1. Das Spektrum atmosphärischer Prozesse

Ordnet man alle bekannten atmosphärischen Bewegungsformen und Prozesse nach „Scales“ bezüglich der zeitlichen Perioden und der räumlichen Wellenlängen, dann erhält man ein kontinuierliches Spektrum, sozusagen ein „Scale“-Chaos, welches eine klare Abgrenzung von „Scale“-Bereichen, und damit eine Klassifizierung der Prozesse oft sehr erschwert. Hieran sind vornehmlich die nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen den Prozessen verschiedener „Scales“ verantwortlich, die sehr starken räumlichen und zeitlichen Schwankungen unterworfen sind. Trotzdem läßt sich aus der Untersuchung von Windspektren und der systematischen Auswertung von Satellitenbildern in Hinblick auf räumliche Strukturen von Wolkensystemen eine schematische Anordnung der wichtigsten atmosphärischen Bewegungsformen und Prozesse in der Weise vornehmen, wie es das „Scale“-Diagramm der Abbildung 1 (7) erkennen läßt.

Der in der Abbildung verwendete Begriff eines charakteristischen „Scales“ bezieht sich auf die Größenordnung der räumlichen Strukturen bzw. der zeitlichen Abläufe der eingezeichneten Phänomene. Im großräumigen „Scale“ sind Wellenlänge und Periode planetarischer Wellen als charakteristische „Scales“ zu verwenden, im kleinräumigen „Scale“ die Dimensionen und Lebensdauern turbulenter Wirbel. Die Schraffierung deutet sehr schematisch an, in welchen „Scale“-Bereichen sich die spektrale kinetische Energie meteorologischer Prozesse vornehmlich befindet.

Darstellungen dieser Art, zurückgehend bis in die frühen fünfziger Jahre (12), (13), besitzen nicht nur hohen didaktischen Wert (25) in Hinblick auf das Verständnis dessen, was es in der Atmosphäre an „Scale“-

Wechselwirkungen geben kann, sondern beleuchten zugleich das Problem der Vorhersagbarkeit dieser im Diagramm eingezeichneten Phänomene.

2. Deterministische und stochastische Vorhersage

Angesichts der Breite des Spektrums atmosphärischer Prozesse ist es erforderlich, den Begriff einer Vorhersage weiter zu fassen, als es uns aus der Sicht der täglichen Wettervorhersage geläufig ist. Zeitlich überdeckt der Vorhersagezeitraum den Bereich von vielleicht einer

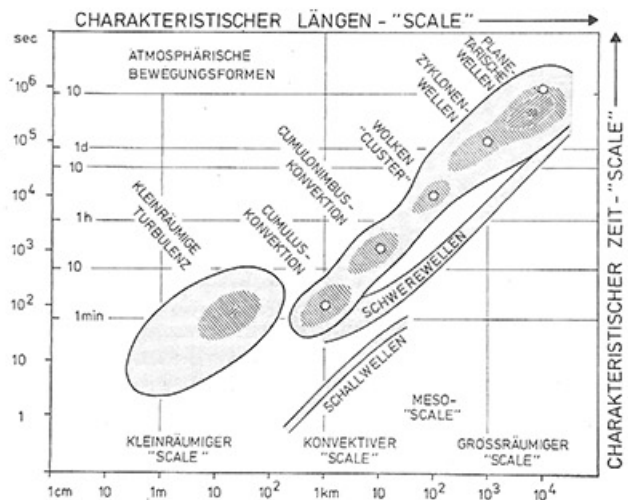


Abb. 1

Schematische Darstellung der charakteristischen Längen- und Zeit-„Scales“ sowie der energetischen Besetzung für verschiedene besonders wichtige Bewegungsformen und Prozesse innerhalb der Atmosphäre. Die kleinen Kreise stellen jeweils die charakteristische Geschwindigkeit 10 m/sec. dar (7).

Stunde (bei der Flugberatung) bis zu vielen tausend Jahren (bei der Vorhersage von Klimaänderungen) und räumlich wird ein Bereich von weniger als einem Kilometer (Vorhersagen für den Weinbau) bis hin zur globalen Erstreckung der Atmosphäre überdeckt. Auch die Zahl der zu prognostizierenden Variablen ist größer als konventionell angenommen. Vorhersagen der Art und Konzentration des Aerosols, des natürlichen und künstlichen Staubes, der chemischen Luftverunreinigungen und deren chemischer und photochemischer Wechselwirkungen untereinander sowie mit den Bestandteilen der Luft und schließlich der spektralen sowie räumlichen Verteilung der Wolkenelemente stehen in Zusammenhang mit Vorhersagen der Strahlungswechselwirkung zwischen den verschiedenen Komponenten des Systems Sonne-Atmosphäre-Festländer-Wasserflächen-Eisflächen. Auch der Begriff der Genauigkeit einer Vorhersage ist nicht eindeutig definierbar, sondern hängt stark von der Sensibilität des Systems in dem betreffenden Bereich des Spektrums der Phänomene ab.

Der Wert synoptischer sowie statistisch-klimatologischer Vorhersagen für alle Bereiche des öffentlichen Lebens ist unbestritten. Die mathematisch-physikalische Vorhersage dagegen hat im Laufe dieses Jahrhunderts verschiedene grundlegende Wandlungen und Bewertungen erlebt. Der Optimismus in Hinblick auf eine mögliche deterministische Vorhersage (1) nach dem Schema: „exakter Anfangszustand“ plus „exakte mathematisch-physikalische Beschreibung des Gesamtsystems“ plus „exakte mathematische Lösungsverfahren“ gleich „exakte Vorhersage“ bestimmter Prozesse im „Scale“-Diagramm (oder aller gleichzeitig) wich mehr und mehr einem ausgeprägten Pessimismus, ausgelöst durch das verunglückte erste numerische Experiment (19) und verstärkt durch die Untersuchungen über die Unmöglichkeit exakter Vorhersagen für Teilgebiete der Erde (5). Mit Beginn der fünfziger Jahre wendete sich das Blatt wieder zugunsten der mathematisch-physikalischen Vorhersage, als die numerischen Kurzfristvorhersagen für großräumige atmosphärische Bewegungsformen immer erfolgreicher wurden. Schwierigkeiten traten jedoch sofort wieder auf, als versucht wurde, mittel- und langfristige Vorhersagen für den großräumigen „Scale“ in gleicher Weise zu erstellen. Die durch alle subsynoptischen Prozesse des „Scale“-Diagramms verursachten nichtadiabatischen, mit Wärmeumsatz verbundenen Effekte machen sich nach zwei bis drei Tagen dynamisch bemerkbar und führen so zu Wechselwirkungen mit dem synoptischen „Scale“.

Es ist somit ersichtlich, daß der Begriff eines „exakten Anfangszustandes“ weder definierbar noch meßbar ist. Jeder mit noch so aufwendigen Meßsystemen ermittelte Anfangszustand enthält Fehler in allen Bereichen des Spektrums der Phänomene, besonders aber im Bereich der subsynoptischen. Infolge unserer ungenügenden Kenntnis auf dem Gebiet der atmosphärischen Turbulenz aller „Scales“, der Physik und Dynamik der Wolken, der Wechselwirkungen zwischen den Prozessen verschiedener „Scales“ sowie auf dem Gebiet der Auslösung und nichtlinearen Wirksamkeit der Kaskade von Instabilitäten (Phaseninstabilität des Wassers, koloidale Instabilität in den Wolken, konvektive Instabilität, barotrope und barokline Instabilität im Wellenregime der planetarischen Zirkulation, Instabilität des Klimas) kann auch von einer „exakten mathematisch-physikalischen Beschreibung des Gesamtsystems“ nicht die Rede sein. Auch „exakte mathematische Lösungsver-

fahren“ sind infolge der Nichtlinearität aller Gleichungssysteme, auch der einfachsten Modellgleichungen, prinzipiell nicht vorhanden.

Man kann somit feststellen, daß das allgemeine meteorologische Vorhersageproblem weder exakt mathematisch-physikalisch formulierbar noch exakt mathematisch lösbar ist. Das System Atmosphäre-Festländer-Wasserflächen-Eisflächen ist für uns ein indeterministisches System, für welches deterministische Vorhersagen prinzipiell nicht erstellt werden können.

Die Praxis der mathematisch-physikalischen Vorhersage kann deshalb nur folgendermaßen aussehen: Will man die Phänomene eines bestimmten „Scale“-Bereiches prognostizieren, dann konstruiert man sich unter Zuhilfenahme der Methode der „Scale“-Analyse ein mathematisches Modell, welches deterministisch gemacht wird, indem man die Wechselwirkungen mit den benachbarten „Scales“ parameterisiert, d. h. durch geeignete Parameter in Abhängigkeit von den Variablen der „Scale“-Umgebung sowie des Modells darstellt. Hierdurch kommt das erste indeterministische Element in die Vorhersage. Bei der Modellentwicklung für die globale atmosphärische Zirkulation hat man z. B. die Wechselwirkungen mit dem gesamten Spektrum der subsynoptischen Prozesse zu parameterisieren; ein bis heute weitgehend ungelöstes Problem. Die numerischen Lösungsverfahren bringen nun zusätzlich schwer abschätzbare Modifikationen der Vorhersage zustande und führen im Verein mit mangelhaft bekannten Anfangsbedingungen zu einer weitgehend indeterministischen Vorhersage.

Die Frage, die sich nun erhebt, ist die folgende: Wie sensibel ist das deterministische Modell von der Parameterisierung der Nachbar-„Scales“, von der Unsicherheit der Anfangsbedingungen sowie von den besonderen Eigenschaften der numerischen Lösungsverfahren abhängig, d. h. wie lange kann sich während einer Vorhersage der deterministische Charakter der Modellgleichungen erhalten, ehe er von den indeterministischen Elementen überwuchert wird. Man kann sich denken, daß es auf jeden Fall Grenzen der deterministischen Vorhersagbarkeit geben muß. Diese müssen jedoch von Modell zu Modell verschieden und von der Parameterisierungstechnik sowie der numerischen Technik abhängig sein.

Derartige systematische Untersuchungen begannen bereits Ende der fünfziger Jahre (23) und wurden im Zusammenhang mit GARP seit 1966 immer aktueller (2), (20), (17) (Vorarbeiten (14), (15), (16)), (3), (22), (8), (6), (11). Besonders diejenigen Untersuchungen, die sich mit der Fehlerfortpflanzung in speziellen Modellen befaßten, brachten jedoch mehr Erkenntnisse über die Eigenschaften der Modelle selbst als über die Vorhersagbarkeit atmosphärischer Prozesse (20). Demgemäß waren die Grenzzeiten für eine deterministische Vorhersage auch von Modell zu Modell verschieden. Eine gemeinsame Aussage brachten jedoch alle diese Untersuchungen: Großräumige atmosphärische Prozesse lassen sich maximal einen Monat deterministisch vorhersagen, subsynoptische um so weniger je kleiner der „Scale“ derselben ist.

Ein sehr instruktives Beispiel für eine derartige Untersuchung gab LORENZ (17), der das Vorhersageproblem bei einem barotropen, divergenzfreien Modell der Atmosphäre untersuchte. Zugrunde lag die Vorticity-Gleichung für die Stromfunktion ψ ($v_h = k \times \nabla_h \psi$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\zeta + f) &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_h \cdot \nabla_h (\zeta + f) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_h^2 \psi) + (k \times \nabla_h \psi) \cdot \nabla_h (\nabla_h^2 \psi + f) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_h^2 \psi) + J(\psi, \nabla_h^2 \psi + f) \approx \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_h^2 \psi) + J(\psi, \nabla_h^2 \psi) = 0. \end{aligned} \quad [1]$$

Bei Kenntnis „exakter“ Anfangsbedingungen sollte sich mit Hilfe der deterministischen Gleichung [1] und bei Ignorierung mathematischer Fehlermöglichkeiten während der Lösung der Gleichung auch eine „exakte“ deterministische Prognose über beliebig lange Zeiträume ergeben. „Exakte“ Anfangsbedingungen gibt es jedoch in der Praxis nicht und so wird sich die Prognose auf der Basis von [1] unter Zugrundelegung fehlerhafter Anfangsbedingungen im Vergleich mit der Natur (sofern das Modell die Natur überhaupt ausreichend genau simuliert) mit wachsender Prognosezeit als mehr und mehr falsch erweisen. Ein Vergleich mit der Natur zwecks Prognoseprüfung ist im vorliegenden Falle jedoch nicht möglich. Man hilft sich nun folgendermaßen: Es werden zwei Prognosen durchgeführt. Prognose (1) geht von gegebenen Anfangsbedingungen aus, welche man als „exakt“ definiert. Die Prognose auf der Basis des Modells ist dann deterministisch und „exakt“, stellt somit die Modellnatur richtig dar. Prognose (2) geht von Anfangsbedingungen aus, welche sich mehr oder weniger durch „Fehler“ von denjenigen der Prognose (1) unterscheiden. Nach entsprechend langer Prognosezeit unterscheiden sich beide Prognosen so sehr, daß sie auch im größten „Scale“ keine Ähnlichkeit mehr miteinander besitzen. LORENZ zeigte, daß sich selbst bei „kaum“ erkennbaren Unterschieden in den Anfangsbedingungen (solchen im subsynoptischen „Scale“) nach weniger als drei Wochen Prognosezeit der Zustand einstellt, daß beide Prognosen nicht mehr miteinander vergleichbar sind, obgleich man zumindest im großräumigen „Scale“ vollkommene Identität der Anfangsbedingungen gehabt hatte. Man kann deshalb auch sagen, daß die Atmosphäre infolge der nichtlinearen Wechselwirkungen und der dadurch bewirkten Fehlerfortpflanzung bezüglich der Anfangsbedingungen nur ein relativ kurzes „Gedächtnis“ besitzt und diese spätestens nach vier Wochen einfach „vergessen“ hat. Diese Eigenschaft ist uns eigentlich seit vielen Jahren von den Modellexperimenten zur globalen atmosphärischen Zirkulation her bekannt. Dort beginnt die numerische Integration mit den einfachsten Anfangsbedingungen, die denkbar sind: Die Atmosphäre ruht und besitzt eine isotherme vertikale Temperaturschichtung. Unter dem Einfluß von Energiezufuhr und Reibung stellt sich meist nach weniger als einem Monat Integrationszeit eine realistische globale Zirkulation ein, so als ob es den höchst irrealen Anfangszustand nie gegeben hätte.

Der Zeitpunkt, in dem sich die beiden Prognosen (1) und (2) in nicht mehr erträglichem Maße voneinander unterscheiden (in einem vorgegebenen „Scale“), ist dann die praktische Grenze der deterministischen Vorhersagbarkeit. Wann dies der Fall ist, hängt von der Definition des erträglichen Maßes an Unterschieden ab und ist von der Verwendung der Prognose her gesehen eine Sache der Konvention. Die Untersuchungen von LORENZ (17) mündeten in dem folgenden anschaulichen Diagramm.

Die ausgezogene Kurve stellt die spektrale Energieverteilung dar, welche während der Prognose unveränderlich bleibt. Infolge fehlerhafter Anfangsbedingungen entsteht bei der Prognose (2) eine Fehlerkinetische Energie, welche zum Ausdruck bringt, daß sich beide prognostizierten Strömungen voneinander unterscheiden. Man entnimmt Abb. 2, daß sich nach 15 Minuten alle Prozesse mit „Scales“, die kleiner als 1 km sind, infolge von Unterschieden der Anfangsbedingungen im kleinsten „Scale“ nicht mehr deterministisch vorhersagen lassen. Diejenigen Prozesse, die „Scales“ zwischen 1 und 5 km besitzen, sind zunehmend sicherer vorhersagbar, alle größeren sind nach 15 Minuten noch voll deterministisch prognostizierbar. Mit größerer Prognosezeit überwuchert das Spektrum der Fehlerkinetischen Energie mehr und mehr das Energiespek-

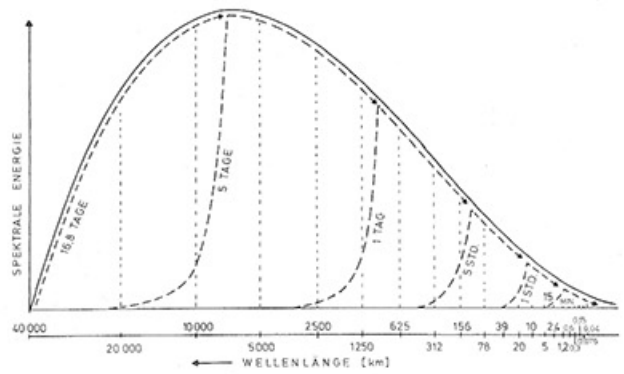


Abb. 2

Spektrale Energieverteilung für eine deterministische Vorhersage mit Hilfe eines einfachen Modells und diejenige, die sich bei Annahme von kleinen Unterschieden in den Anfangsbedingungen nach der jeweils angegebenen Zeit ergibt (17).

trum und führt dazu, daß nach einer Prognosezeit von 5 Tagen nur noch sehr lange planetarische Wellen (ab Wellenlänge 20 000 km) deterministisch vorhersagbar sind. Alle Prozesse mit „Scales“ unterhalb etwa 7 000 km sind schon vollkommen indeterministisch geworden. Die Grenze der Vorhersagbarkeit ist dann erreicht, wenn das gesamte Spektrum überwuchert ist, was nach etwa 17 Tagen der Fall ist.

Bei den numerischen Experimenten zeigte sich, daß die Vorhersagbarkeit vom Abfall des Energiespektrums zur Seite der kurzen Wellenlängen abhängt. Dieser Abfall gehorchte im Experiment der Abb. 2 dem bekannten $(-5/3)$ -Gesetz. Die Verwendung eines $(-7/3)$ -Gesetzes bringt eine leichte Verlängerung der deterministischen Vorhersagbarkeit, vor allen Dingen in den kleineren „Scales“, die Verwendung des neuerdings aus der Theorie (10) und aus Beobachtungen (24), (9) heraus abgeleiteten $(-9/3 = -3)$ -Gesetzes bringt weitere Verlängerungen der Vorhersagbarkeit.

Trotz der großen prinzipiellen Bedeutung der LORENZschen Untersuchung fehlt es nicht an Kritik. Diese kommt vornehmlich aus dem Lager der Vertreter der neuen „Stochastisch-dynamischen Vorhersage“. Sie bemängeln das Folgende: Das Modell (Barotropie, Homogenität, Isotropie, Vernachlässigung des β -Effektes) ist für die Atmosphäre zu unrealistisch, um prinzipielle Grenzen der Vorhersagbarkeit realer atmosphärischer Prozesse abschätzen zu können. Mathematisch gesehen ist es unzulässig, die prognostische Gleichung für den Unterschied zwischen den Stromfunktionen der Prognosen (1) und (2) zu linearisieren (was LORENZ tat), das Energiespektrum vorzugeben und von einer prognostischen Gleichung für die Kovarianzen (siehe später) ganz abzusehen. Außerdem wird die Beschränkung des Unterschiedes in den Anfangsbedingungen auf einen sehr schmalen „Scale“-Bereich als nicht sehr glücklich angesehen.

Die stochastisch-dynamische Vorhersage (in der Idee möglicherweise zurückgehend auf OBUCHOW (18)), (22), (3), (6), (4) geht nun wie jede dynamische Vorhersage von deterministischen Modellen für atmosphärische Prozesse aus, verwendet also Gleichungen der Art [1] für barotrope Modelle und im Prinzip alle bisher bekannten Systeme von Modellgleichungen, sie führt aber dazu das Konzept der prinzipiellen Unbestimmtheit in den Anfangsbedingungen mit Hilfe von statistischen Maßzahlen zusätzlich in die Vorhersage ein. Wenn man auch die exakten Anfangsbedingungen nicht kennen kann, so hat man aber doch aus der Erfahrung Vorstellungen über die wahrscheinlichste Form der Felder von Anfangsbedingungen. Gibt man sich nicht nur ein einziges System von Anfangsfeldern der Variablen vor, sondern ein ganzes Kollektiv von diesen in Form einer Wahr-

scheinlichkeitsverteilung der Anfangsfelder, dann folgt aus diesem Kollektiv nach Integration der deterministischen Modellgleichungen für jedes Mitglied des Kollektivs ein entsprechendes Kollektiv von Lösungsfeldern. Charakterisiert man die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Variablen zum Anfangszeitpunkt durch die üblichen statistischen Maßzahlen (Erwartungswert, Streuung, Kovarianzen und höhere Momente), dann ist man in der Lage, aus dem Kollektiv der Lösungsfelder dieselben Maßzahlen zu berechnen und bezüglich Zeit und Raumpunkt mit denjenigen zum Anfangszeitpunkt in Beziehung zu setzen. Diese Vorhersage von statistischen Maßzahlen der Variablen ist Gegenstand der stochastisch-dynamischen Vorhersage. Als Nebenprodukt fällt dabei eine recht überzeugende Methode für die Lösung des Problems der prinzipiellen Grenze der Vorhersagbarkeit atmosphärischer Prozesse ab, welche z. B. schon im Falle des barotropen Modells gegenüber den Ergebnissen von LORENZ (17) ganz erhebliche Verlängerungen der Vorhersagbarkeit bringt. Verwendet man die LORENZschen Werte, die unter Gültigkeit des (-7/3)-Gesetzes entstanden sind (Wellenlänge $L = 5000; 1250; 312; 20$ km; zugehörige Vorhersagbarkeitszeiten $T = 4,2; 2,3; 1,4; 0,45$ Tage) und setzt dazu im Vergleich die aus der stochastisch-dynamischen Vorhersagemethode gewonnenen für das gleiche Modell (6), nämlich $T = 5,0; 4,5; 3,5; 2,1$ Tage, dann erkennt man, daß die stochastisch-dynamisch berechneten Werte für die kleineren „Scales“ wesentlich größer sind. Der Grund für diesen Unterschied ist vielfältiger Natur und kann im Rahmen eines Vortrages nicht befriedigend beschrieben werden. Soviel kann aber gesagt werden: Die stochastisch-dynamischen Gleichungen, z. B. für den Erwartungswert, enthalten im Gegensatz zu den deterministischen Ausgangsgleichungen als Folge der eingeführten Statistik einen „Reibungsterm“ (nur so genannt, weil bei der Mittelbildung der NAVIER-STOKESSchen Gleichungen der turbulente Reibungsterm als statistisches Element erscheint und hilft, die Bewegungen der Atmosphäre in der planetarischen Grenzschicht besser zu beschreiben, als dies mit Hilfe der deterministischen Gleichungen für laminare Strömungen möglich ist), welcher offensichtlich dazu beiträgt, die Bewegungen der Atmosphäre im statistischen Sinne besser zu beschreiben, als dies mit den deterministischen Ausgangsgleichungen möglich ist.

$$\sum_{m=1}^N (\nabla_h^2 F_m) \frac{d\psi_m}{dt} = - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [(k \times \nabla_h F_m) \cdot \nabla_h (\nabla_h^2 F_n)] \psi_m \psi_n - \sum_{m=1}^N [(k \times \nabla_h F_m \cdot \nabla_h f)] \psi_m$$

$$\sum_{m=1}^N \left(-\frac{a_m}{L}\right)^2 F_m \dot{\psi}_m = - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left[-\left(\frac{a_n}{L}\right)^2 (k \times \nabla_h F_m) \cdot \nabla_h F_n\right] \psi_m \psi_n - \sum_{m=1}^N [(k \times \nabla_h F_m) \cdot \nabla_h f] \psi_m$$

Nach Multiplikation mit F_k und anschließender Integration über den ganzen Bereich erhält man weiter

$$-\left(\frac{a_k}{L}\right)^2 \dot{\psi}_k = - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left[-\left(\frac{a_n}{L}\right)^2 \overline{F_k (k \times \nabla_h F_m) \cdot \nabla_h F_n}\right] \psi_m \psi_n - \sum_{m=1}^N \overline{F_k (k \times \nabla_h F_m) \cdot \nabla_h f} \psi_m$$

was mit den vollständig als bekannt anzusehenden Koeffizienten

$$a_{kmn} = - \left(\frac{a_n}{a_k}\right)^2 \overline{F_k (k \times \nabla_h F_m) \cdot \nabla_h F_n};$$

$$b_{km} = - \left(\frac{L}{a_k}\right)^2 \overline{F_k (k \times \nabla_h F_m) \cdot \nabla_h f}$$

auf die Form [2] zurückführt.

Nun erkannte bereits LORENZ (14), daß sich alle in der Meteorologie verwendeten prognostischen Gleichungen (nach Übergang in die Spektraldarstellung) in der Form

$$\dot{X}_k = \frac{dX_k}{dt} = \sum_{m=1}^{q-N} \sum_{n=1}^{q-N} A_{kmn} X_m X_n - \sum_{m=1}^{q-N} B_{km} X_m + C_k$$

3. Das Prinzip der stochastisch-dynamischen Vorhersage

Geht man von der barotropen Vorticity-Gleichung [1], d. h. von

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_h^2 \psi) = - (k \times \nabla_h \psi) \cdot \nabla_h (\nabla_h^2 \psi + f) \quad [1]$$

aus und wendet den inversen LAPLACESchen Operator ∇_h^{-2} an, dann folgt zunächst formal

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = - \nabla_h^{-2} [(k \times \nabla_h \psi) \cdot \nabla_h (\nabla_h^2 \psi + f)]$$

Geht man nun auf der rechten Seite zu endlichen Differenzen über, dann erhält man für jeden Gitterpunkt der x,y -Ebene eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Zeit der Form

$$\dot{\psi}_k = \frac{d\psi_k}{dt} = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N a_{kmn} \psi_m \psi_n - \sum_{m=1}^N b_{km} \psi_m \quad [2]$$

wobei $\psi_k(t)$ die zeitlich abhängige Stromfunktion am Gitterpunkt „k“ ist. Der Index k durchläuft dabei alle Werte von 1 bis N, mit N als der Gesamtzahl der Gitterpunkte. Zusammen mit einer Anfangsbedingung $\psi_k(0)$ folgt aus [2] eine deterministische Vorhersage von ψ für alle Gitterpunkte.

Methodisch klarer und in vielen Fällen auch leichter überschaubar ist die Verwendung der Spektralmethode. Hier wird die Stromfunktion nach einem System von normierten Orthogonalfunktionen entwickelt. Dieses System $F_i = F_i(x,y)$ ($i = 1,2 \dots, N$) genüge den folgenden Bedingungen:

Orthogonalität $\overline{F_i F_k} = \iint F_i F_k dx dy = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 : i = k \\ 0 : i \neq k \end{cases}$

Normierung $\overline{F_i} = \iint F_i dx dy = 1$

und $\nabla_h^2 F_i = -\left(\frac{a_i}{L}\right)^2 F_i$.

Dann ist $\psi = \sum_{m=1}^N \psi_m F_m; \psi_i = \overline{F_i \psi}$

Führt man dies in [1] ein, dann erhält man

schreiben lassen. Hierbei ist q die Zahl der unabhängigen Variablen und N wieder die Anzahl der verwendeten Entwicklungsterme.

In Hinblick auf die verschiedenartigen Gleichungssysteme für die Behandlung der verschiedenen „Scales“ ist es nicht uninteressant, Gleichung [3] für den Fall der allgemeinen dreidimensionalen Bewegungen zu verifizieren. Dazu ist es notwendig, eine Minimalzahl von abhängigen Variablen zu verwenden (wegen der Herabsetzung von Rechenzeit). Die Verwendung der Exner-Funktion $\Pi = c_p (p/p_0)^{R/c_p}$ im vollständigen System von hydrodynamischen Gleichungen führt zu dem folgenden System für den Windvektor v , die Exner-

Funktion Π und die potentielle Temperatur Θ , insgesamt also für nur 5 unabhängige skalare Funktionen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= -v \cdot \nabla v - \Theta \nabla \Pi - 2 \omega \times v + g + R \\ \frac{\partial \Pi}{\partial t} &= -v \cdot \nabla \Pi - \frac{R}{c_v} \Pi \nabla \cdot v + \frac{R}{c_v} \frac{q}{\Theta} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= -v \cdot \nabla \Theta + \frac{q}{\Pi}\end{aligned}$$

Hier ist g der Vektor der Schwerebeschleunigung, R der Reibungsvektor und q die nichtadiabatische Wärmezufuhr bzw. -abfuhr.

Entwickelt man nun alle abhängigen Variablen nach einem dreidimensionalen orthonormierten System gemäß

$$v = \sum_{m=1}^N F_m v_m; \quad \Pi = \sum_{m=1}^N F_m \Pi_m; \quad \Theta = \sum_{m=1}^N F_m \Theta_m$$

wobei die $F_k = F_k(x,y,z)$ ein System von dreidimensionalen Orthogonalfunktionen bilden, welche analogen Beziehungen wie die zweidimensionalen genügen, dann erhält man zunächst

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^N F_m \dot{v}_m &= - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [F_m \nabla F_n] \cdot v_m v_n - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [F_m \nabla F_n] \Theta_m \Pi_n - \sum_{m=1}^N F_m 2 \omega \times v_m + g + \sum_{m=1}^N F_m R_m \\ \sum_{m=1}^N F_m \dot{\Pi}_m &= - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [F_m \nabla F_n] \cdot v_m \Pi_n - \frac{R}{c_v} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [F_m \nabla F_n] \cdot \Pi_m v_n + \frac{R}{c_v} \sum_{m=1}^N F_m \left(\frac{q}{\Theta} \right)_m \\ \sum_{m=1}^N F_m \dot{\Theta}_m &= - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [F_m \nabla F_n] \cdot v_m \Theta_n + \sum_{m=1}^N F_m \left(\frac{q}{\Pi} \right)_m\end{aligned}$$

und daraus nach Multiplikation mit F_k und Integration über den gesamten Raum unter Verwendung der Orthogonalitätseigenschaften von F_i

$$\begin{aligned}\dot{v}_k &= - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \overline{[F_k F_m \nabla F_n]} \cdot (v_m v_n + \Theta_m \Pi_n \mathbf{E}) - 2 \omega \times v_k + g + R_k \\ \dot{\Pi}_k &= - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \overline{[F_k F_m \nabla F_n]} \cdot (v_m \Pi_n + \frac{R}{c_v} \Pi_m v_n) + \frac{R}{c_v} \left(\frac{q}{\Theta} \right)_k \\ \dot{\Theta}_k &= - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \overline{[F_k F_m \nabla F_n]} \cdot v_m \Theta_n + \left(\frac{q}{\Pi} \right)_k\end{aligned} \quad [4]$$

wobei \mathbf{E} den Einheitstensor bedeutet.

auftreten. Die Koeffizienten B_{km} und C_k sind darüber hinaus ganz besonders einfach.

Dieses System von Spektralgleichungen ist deshalb besonders einfach gebaut, weil als Koeffizienten A_{kmn} ausschließlich die Komponenten der Vektoren $\overline{F_k F_m \nabla F_n}$

Geht man zur Komponentenschreibweise in einem kartesischen System über, in welchem der Windvektor die Komponenten u,v,w besitzt, dann erhält man ausführlich

$$\begin{aligned}\dot{u}_k &= - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left\{ \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial x}]} (u_m u_n + \Theta_m \Pi_n) + \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial y}]} v_m u_n + \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial z}]} w_m u_n \right\} + f v_k - l w_k + (R_x)_k \\ \dot{v}_k &= - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left\{ \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial x}]} u_m v_n + \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial y}]} (v_m v_n + \Theta_m \Pi_n) + \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial z}]} w_m v_n \right\} - f u_k + (R_y)_k \\ \dot{w}_k &= - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left\{ \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial x}]} u_m w_n + \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial y}]} v_m w_n + \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial z}]} (w_m w_n + \Theta_m \Pi_n) \right\} + l u_k - g + (R_z)_k \\ \dot{\Pi}_k &= - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left\{ \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial x}]} (u_m \Pi_n + \frac{R}{c_v} \Pi_m u_n) + \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial y}]} (v_m \Pi_n + \frac{R}{c_v} \Pi_m v_n) + \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial z}]} (w_m \Pi_n + \frac{R}{c_v} \Pi_m w_n) \right\} + \frac{R}{c_v} \left(\frac{q}{\Theta} \right)_k \\ \dot{\Theta}_k &= - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left\{ \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial x}]} u_m \Theta_n + \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial y}]} v_m \Theta_n + \overline{[F_k F_m \frac{\partial F_n}{\partial z}]} w_m \Theta_n \right\} + \left(\frac{q}{\Pi} \right)_k\end{aligned}$$

Läßt man die Probleme, die mit der Spektraldarstellung von R und q zusammenhängen außer acht, dann kann man die $5 \cdot N$ Variablen $u_k, v_k, w_k, \Pi_k, \Theta_k$ zu dem Satz X_k zusammenfassen und man erkennt, daß für X_k die Form [3] entsteht. Die Koeffizienten in [3] lassen sich dann leicht aus dem vorstehenden Formelsatz herauslesen. Bei einer Auflösung der räumlichen Felder bis zur „Wellenzahl“ 20 ($N = 20$) hat man es dann mit einem nichtlinear gekoppelten System von 100 gewöhnlichen zeitabhängigen Differentialgleichungen zu tun, welches die Koeffizientenfunktionen X_k der Reihenentwicklungen deterministisch zu berechnen gestattet, falls exakte

Anfangsbedingungen für die Variablen vorliegen. Denkt man sich einen $5 \cdot N$ -dimensionalen Raum durch die Gesamtheit der Variablen X_k aufgespannt, dann wird der Zustand des Systems in diesem, auch „Phasenraum“ genannten Raum, zu einer bestimmten Zeit durch einen Punkt dargestellt. Zustandsänderungen stellen sich als Trajektorie in diesem Phasenraum dar.

Wenn man sagt, es ließen sich die Anfangsbedingungen nicht exakt feststellen, dann bedeutet dies, daß man nicht genau sagen kann, an welcher Stelle des Phasenraumes sich der Punkt befindet, der den Zustand des Systems zur Zeit $t=t_0$ repräsentiert. Sicher wird man

aber eine Wahrscheinlichkeitsdichte $P(X_1, X_2, \dots, X_{5N}; t_0)$ für die Lage angeben können. Für diese gilt $P \geq 0$ für alle X_k und alle t sowie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1, x_2, \dots, x_{5N}; t) dx_1 dx_2 \dots dx_{5N} = 1$$

für alle t . Außerdem gilt für die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeit P die LIOUVILLESche Gleichung, für die eine kurze Ableitung gegeben werden soll.

Die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P d\tau = 1$$

wird gemäß LAGRANGE nach der Zeit differenziert

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P d\tau \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP}{dt} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P \left[\frac{1}{d\tau} \frac{d}{dt} (d\tau) \right] d\tau = 0.$$

Bedeutet x den „Ortsvektor“ und \dot{x} den „Geschwindigkeitsvektor“ im Phasenraum, dann ist in vollkommener Analogie zur Hydrodynamik die relative kubische Ausdehnungsgeschwindigkeit durch

$$\frac{1}{d\tau} \frac{d}{dt} (d\tau) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \dot{x} = \sum_{m=1}^{5N} \frac{\partial \dot{x}_m}{\partial x_m}$$

ausdrückbar. Beachtet man weiter noch die ebenso leicht einzusehende Beziehung

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \dot{x} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}$$

dann erhält man aus

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P d\tau \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dP}{dt} + P \frac{\partial}{\partial x} \cdot \dot{x} \right\} d\tau = 0.$$

die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (P \dot{x}) \right\} d\tau = 0$$

welche direkt auf die LIOUVILLESche Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X} \cdot (P \dot{X}) = \frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{m=1}^{5N} \frac{\partial}{\partial X_m} (P \dot{X}_m) = 0 \quad [5]$$

führt.

$$X_k X_l = (\mu_k + X'_k) (\mu_l + X'_l) = \mu_k \mu_l + X'_k \mu_l + \mu_k X'_l + X'_k X'_l$$

$$X_k X_l X_m = \mu_k \mu_l \mu_m + X'_k \mu_l \mu_m + \mu_k X'_l \mu_m + \mu_k \mu_l X'_m + X'_k X'_l \mu_m + X'_k \mu_l X'_m + \mu_k X'_l X'_m + X'_k X'_l X'_m$$

$$X_k X_l X_m X_n = \mu_k \mu_l \mu_m \mu_n + X'_k \mu_l \mu_m \mu_n + \mu_k X'_l \mu_m \mu_n + \mu_k \mu_l X'_m \mu_n + \mu_k \mu_l \mu_m X'_n + X'_k X'_l \mu_m \mu_n +$$

$$+ X'_k \mu_l X'_m \mu_n + X'_k \mu_l \mu_m X'_n + \mu_k X'_l \mu_m X'_n + \mu_k X'_l X'_m \mu_n + \mu_k \mu_l X'_m X'_n + X'_k X'_l X'_m \mu_n +$$

$$+ X'_k X'_l \mu_m X'_n + X'_k \mu_l X'_m X'_n + \mu_k X'_l X'_m X'_n + X'_k X'_l X'_m X'_n$$

unter Verwendung der Abkürzungen

$$E[X'_k X'_l] = \sigma_{kl} \quad : \text{Kovarianztensor (k} \neq \text{l),} \\ \text{Varianztensor (k=l)}$$

$$E[X'_k X'_l X'_m] = \tau_{klm} \quad : \text{Drittes Moment in Bezug} \\ \text{auf die } \mu$$

$$E[X'_k X'_l X'_m X'_n] = \lambda_{klmn} \quad : \text{Viertes Moment in Bezug} \\ \text{auf die } \mu$$

Nach Gleichung [3] ist nun \dot{X}_k durch

$$\sum \sum A_{kmn} X_m X_n - \sum B_{km} X_m + C_k$$

ausdrückbar, so daß die Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{m=1}^{5N} \frac{\partial}{\partial X_m} \left\{ P \left(\sum_{r=1}^{5N} \sum_{s=1}^{5N} A_{mrs} X_r X_s - \sum_{r=1}^{5N} B_{mr} X_r + C_m \right) \right\} = 0 \quad [6]$$

die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte P für das spezielle meteorologische Problem (Modell) zu berechnen gestattet, wenn sie zur Zeit $t=t_0$ bekannt war und wenn Randbedingungen für P (Verschwinden im Unendlichen) befriedigt werden. Gleichung [6] und die vorstehende Interpretation des Verfahrens finden sich bei TATARSKY (22) und EPSTEIN (3). Dort wird auch schon darauf hingewiesen, daß eine numerische Integration von [6] im Prinzip zwar leicht möglich, in der Praxis jedoch infolge astronomisch hoher Rechenzeiten so gut wie nicht durchführbar ist. Beide Autoren betonen, daß die Kenntnis von P viel überflüssige Information mit sich bringt, daß man sich stattdessen mit den statistischen Maßzahlen der Wahrscheinlichkeitsdichte gut begnügen kann. So leitet TATARSKY schon Gleichungen für den Erwartungswert und den Kovarianztensor her, vernachlässigt höhere Momente und erhält so ein geschlossenes System ohne jede Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsdichte (die sich jedoch als Folge der Approximationen als Gauß-Verteilung herausstellt).

Wir wollen abschließend noch kurz auf die Herleitung dieser für die stochastisch-dynamische Vorhersage so wichtigen Gleichungen eingehen. Die Fundamentalgröße statistischer Art ist der Erwartungswert für einen der X_k -Werte bzw. für eine Funktion von gewissen X_{k1}, X_{k2}, \dots :

$$E[X_k] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_k P(x_1, x_2, \dots, x_{5N}; t) d\tau = \mu_k;$$

$$E[f(X_{k1}, X_{k2}, \dots)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{k1}, x_{k2}, \dots) P(x_1, x_2, \dots, x_{5N}; t) d\tau$$

Die Abweichung vom Erwartungswert μ_k erfüllt die Bedingung $E[X'_k] = 0$, denn es gilt definitionsgemäß (ähnlich wie in der Theorie der Turbulenz) die Beziehung $X_k = \mu_k + X'_k$. Bildet man nun die Erwartungswerte von Produkten, dann erhält man aus

$$\begin{aligned}
 E [X_k X_l] &= \mu_k \mu_l + \sigma_{kl} \\
 E [X_k X_l X_m] &= \mu_k \mu_l \mu_m + \mu_k \sigma_{lm} + \mu_l \sigma_{km} + \mu_m \sigma_{kl} + \tau_{klm} \\
 E [X_k X_l X_m X_n] &= \mu_k \mu_l \mu_m \mu_n + \mu_k \mu_l \sigma_{mn} + \mu_k \mu_n \sigma_{lm} + \mu_k \mu_m \sigma_{ln} + \\
 &\quad + \mu_l \mu_m \sigma_{kn} + \mu_l \mu_n \sigma_{km} + \mu_m \mu_n \sigma_{kl} + \\
 &\quad + \mu_k \tau_{lmn} + \mu_l \tau_{kmn} + \mu_m \sigma_{kln} + \mu_n \sigma_{klm}
 \end{aligned}$$

Es ist möglich, nach Definition höherer Momente einen Algorithmus für die Berechnung der Erwartungswerte höherer Produkte zu entwickeln und somit sämtliche statistischen Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilung ins Spiel zu bringen.

Bildet man den Erwartungswert der grundlegenden Spektralgleichung [3] (in Analogie zur Mittelbildung der ursprünglichen Gleichungen von v , Π und Θ in der Turbulenztheorie), dann erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
 E \left[\frac{dX_k}{dt} \right] &= \sum_{m=1}^{5 \cdot N} \sum_{n=1}^{5 \cdot N} A_{kmn} E [X_m X_n] - \sum_{m=1}^{5 \cdot N} B_{km} E [X_m] + C_k E [1] \\
 &= \sum_{m=1}^{5 \cdot N} \sum_{n=1}^{5 \cdot N} A_{kmn} \mu_m \mu_n - \sum_{m=1}^{5 \cdot N} B_{km} \mu_m + C_k + \sum_{m=1}^{5 \cdot N} \sum_{n=1}^{5 \cdot N} A_{kmn} \sigma_{mn}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß der Erwartungswert der Zeitableitung gleich der Zeitableitung des Erwartungs-

wertes ist. Ist $f = f(X_{k1}, X_{k2}, \dots)$ wieder irgendeine Funktion der X_k , dann folgt aus

$$\begin{aligned}
 E [f (X_{k1}, X_{k2}, \dots)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f (x_{k1}, x_{k2}, \dots) P (x_1, x_2, \dots, x_{5N}; t) d\tau \\
 \frac{d}{dt} E [f] &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dfP}{dt} + fP \left(\frac{1}{d\tau} \frac{d}{dt} d\tau \right) \right\} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dfP}{dt} + fP \frac{\partial}{\partial x} \cdot \dot{x} \right\} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ P \frac{df}{dt} + f \left[\frac{dP}{dt} + P \frac{\partial}{\partial x} \cdot \dot{x} \right] \right\} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt} P d\tau \\
 \boxed{\frac{d}{dt} E [f] = E \left[\frac{df}{dt} \right]}
 \end{aligned}$$

unter Verwendung der LIOUVILLESchen Gleichung. Für f kann X_k oder eines der höheren Produkte stehen.

Man erhält so aus [7], in Gegenüberstellung mit der deterministischen Ausgangsgleichung, die Gleichung für den Erwartungswert von X_k

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_k = \frac{dX_k}{dt} &= \sum_{m=1}^{5 \cdot N} \sum_{n=1}^{5 \cdot N} A_{kmn} X_m X_n - \sum_{m=1}^{5 \cdot N} B_{km} X_m + C_k \tag{3} \\
 \dot{\mu}_k = \frac{d\mu_k}{dt} &= \sum_{m=1}^{5 \cdot N} \sum_{n=1}^{5 \cdot N} A_{kmn} \mu_m \mu_n - \sum_{m=1}^{5 \cdot N} B_{km} \mu_m + C_k + \sum_{m=1}^{5 \cdot N} \sum_{n=1}^{5 \cdot N} A_{kmn} \sigma_{mn} \tag{8}
 \end{aligned}$$

Die „gemittelten“ Spektralgleichungen unterscheiden sich von den ungemittelten nur durch das zusätzliche Auftreten eines Terms, der seine Analogie im REYNOLDSschen Spannungstensor, sowie in den turbulenten Transportvektoren der gemittelten Gleichungen der Turbulenztheorie findet. Hier wie dort kann im Rahmen der Theorie so gut wie nichts über die Form dieser bei der Mittelbildung erzeugten Terme gesagt werden, es sei denn, daß man neue Gleichungen aus den vorhandenen ableitet, wie z. B. in (21). Dies ist im Falle der Spektralgleichungen besonders einfach und übersicht-

lich; ganz im Gegensatz zu den Verhältnissen in der Turbulenztheorie.

Sucht man eine Gleichung für σ_{kl} , dann braucht man nur von

$$\sigma_{kl} = E [X_k X_l] - \mu_k \mu_l$$

auszugehen, diese Gleichung zu differenzieren

$$\dot{\sigma}_{kl} = E [\dot{X}_k X_l] + E [X_k \dot{X}_l] - \dot{\mu}_k \mu_l - \mu_k \dot{\mu}_l$$

und dann die \dot{X}_k mit Hilfe von [3] und die $\dot{\mu}_k$ mit Hilfe von [8] zu eliminieren. Man erhält so

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{kl} &= \sum \sum \left\{ A_{kmn} E [X_m X_n X_l] + A_{lmn} E [X_m X_n X_k] \right\} - \\
 &\quad - \sum \left\{ B_{km} E [X_m X_l] + B_{lm} E [X_m X_k] \right\} + C_k \mu_l + C_l \mu_k - \\
 &\quad - \sum \sum \left\{ A_{kmn} \mu_m \mu_n \mu_l + A_{lmn} \mu_m \mu_n \mu_k \right\} + \\
 &\quad + \sum \left\{ B_{km} \mu_m \mu_l + B_{lm} \mu_m \mu_k \right\} - C_k \mu_l - C_l \mu_k - \\
 &\quad - \sum \sum \left\{ A_{kmn} \sigma_{mn} \mu_l + A_{lmn} \sigma_{mn} \mu_k \right\}
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{kl} = \sum_{m=1}^{5 \cdot N} \sum_{n=1}^{5 \cdot N} \left\{ A_{kmn} (\mu_m \sigma_{nl} + \mu_n \sigma_{ml} + \tau_{mnl}) + A_{lmn} (\mu_m \sigma_{nk} + \mu_n \sigma_{mk} + \tau_{mnk}) \right\} - \sum_{m=1}^{5 \cdot N} \left\{ B_{km} \sigma_{ml} + B_{lm} \sigma_{mk} \right\} \quad [9]$$

In dieser Gleichung erscheinen als neue Unbekannte die dritten Momente τ_{klm} , für welche sich auf ganz analogem Wege wieder eine extra Gleichung ableiten läßt (6). Auch läßt sich weiterhin ein Algorithmus für die Gleichungen noch höherer Momente finden.

Wie in der Turbulenztheorie tritt nun das Schließungsproblem in den Vordergrund, denn die Berechnung der höheren Momente läßt die erforderliche Rechenzeit unverhältnismäßig ansteigen. Bereits EPSTEIN (3) schloß das System durch die Vernachlässigung der dritten Momente

$$\sum \sum (A_{kmn} \tau_{mnl} + A_{lmn} \tau_{mnk}) = 0$$

und FLEMING (6) diskutierte dieses Problem ausführlich, weshalb darauf verwiesen werden kann.

Besondere Bedeutung besitzt die stochastisch-dynamische Methode bei der Untersuchung der Energetik der Atmosphäre. Man ist nicht nur in der Lage, die fehlerhafte Energetik als Folge fehlerhafter Anfangsbedingungen zu untersuchen, sondern man hat darüber hinaus die Möglichkeit, auch die Unsicherheiten der Parameterisierung benachbarter „Scales“ bei der Untersuchung bestimmter Phänomene systematisch zu erfassen. Die folgende Abb.3 zeigt sehr anschaulich die Unsicherheiten bei der Vorhersage des Windfeldes einer planetarischen Welle (4) als eines der ersten Beispiele der stochastisch-dynamischen Vorhersage.

Abb. 4 gibt ein Beispiel für die Modifikation der bekannten Energieflußdiagramme in der Darstellung von FLEMING (6). Während sonst in derartigen Diagrammen nur der Energieübergang zwischen der verfügbaren potentiellen Energie (AZ: zonales Mittel, AE: Anteil der Eddies) und der kinetischen Energie (KZ und KE) eine Rolle spielt, macht sich nun infolge der Unsicherheit der Anfangsbedingungen auch eine Unsicherheit in der Bestimmung der einzelnen Energieanteile bemerkbar, die man jedoch bei der stochastisch-dynamischen Methode gut in der Hand hat. Es ist auf der Basis der entsprechend formulierten stochastisch-dynamischen Energiegleichungen möglich, diese „uncer-

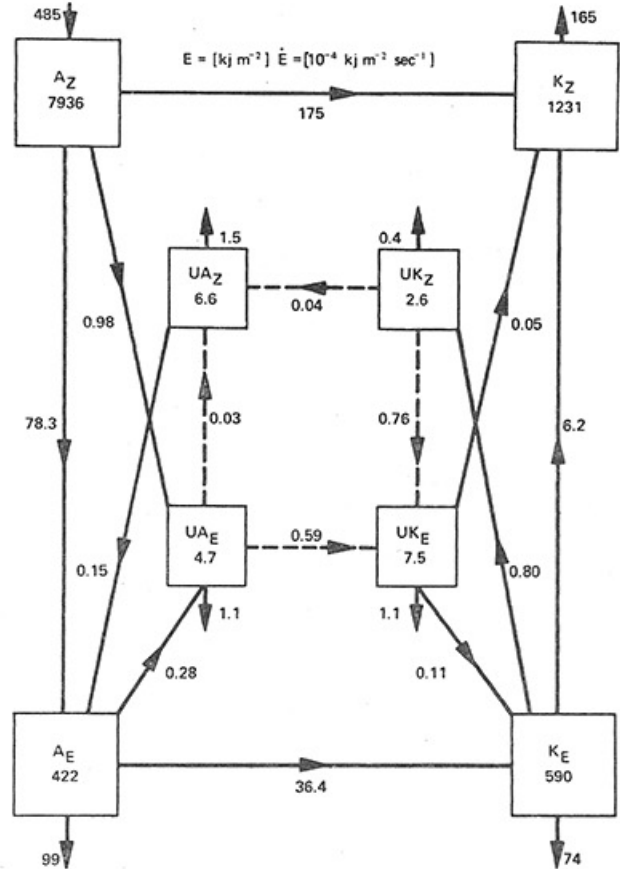


Abb. 4 Energieflußdiagramm eines baroklinen Systems, in welchem infolge der Unsicherheit der Anfangsbedingungen „unsichere“ Energien auftreten, die in Wechselwirkung mit den „sicheren“ Energiebeträgen bestehen. A ist die verfügbare potentielle Energie, K ist die kinetische Energie, der Index Z bezieht sich auf das zonale Mittel, der Index E auf die Wirbel. Der Vorbuchstabe U bedeutet „uncertain“ (6).

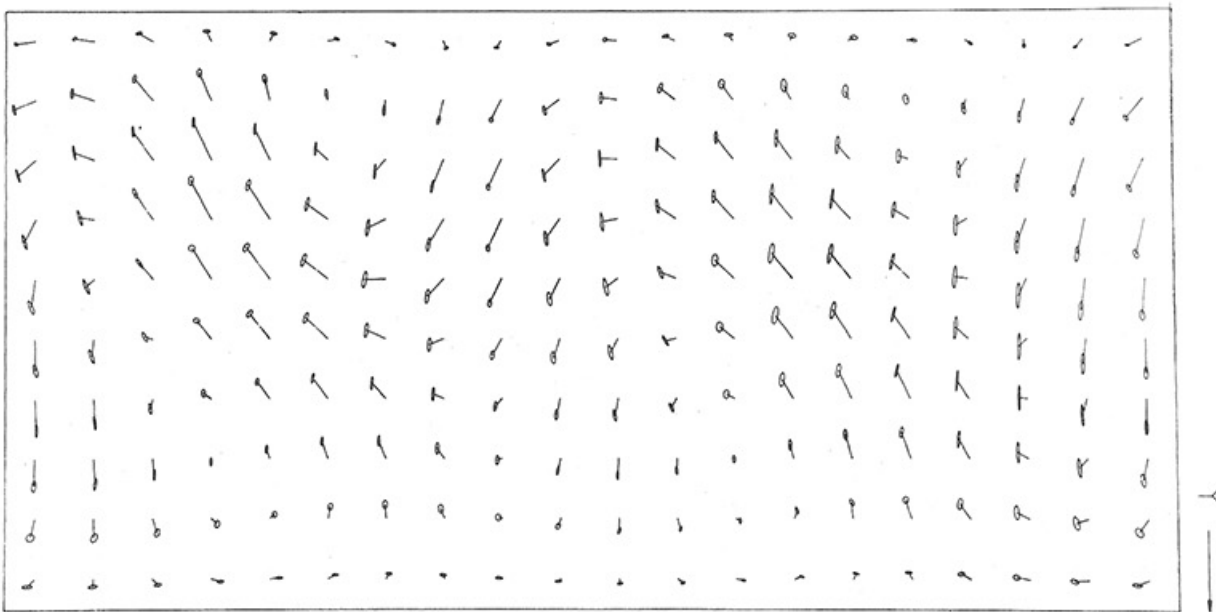


Abb. 3 Vorhergesagtes Windfeld, und zwar sowohl Erwartungswert als auch Kennzeichnung der Unsicherheit. Es besteht eine 50%ige Wahrscheinlichkeit, daß die Endpunkte des wahren Windvektors auf den Ellipsen liegen, die um die Endpunkte der erwarteten Windvektoren herum gezeichnet sind (4).

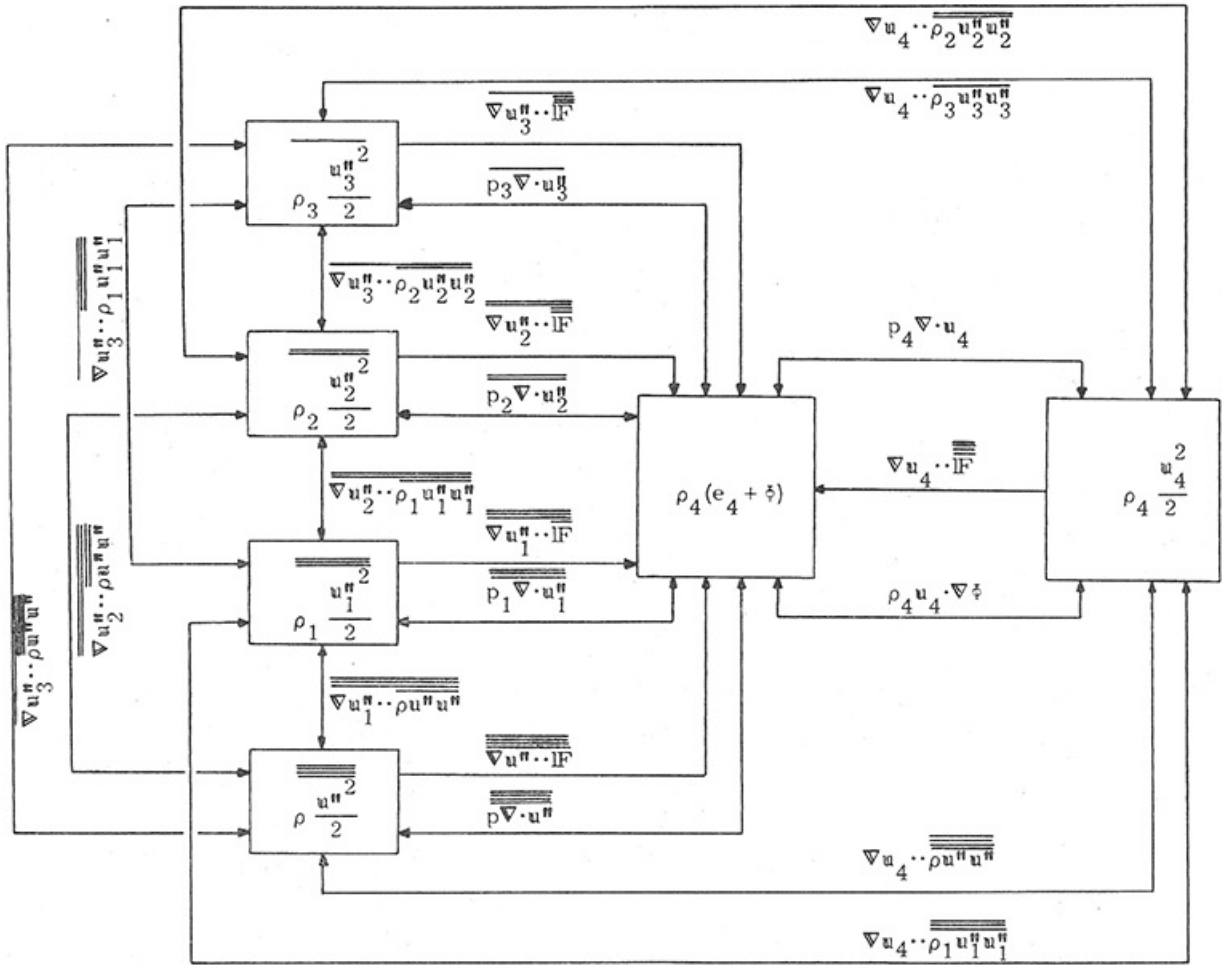


Abb. 5
Energieflußdiagramm der Atmosphäre bei Aufteilung des Spektrums der Phänomene in 4 voneinander unterscheidbare Spektralbänder. Der Index 4 bezieht sich auf den großräumigen „Scale“, alle anderen auf die subsynoptischen „Scales“. Dargestellt sind die internen Energieflüsse zwischen der kinetischen und totalen potentiellen Energie sowie zwischen den verschiedenen turbulenten kinetischen Energien untereinander bzw. mit den Energien des großräumigen „Scales“ (26).

tain“ genannten Energien explizit zu berechnen und sogar anzugeben, wie Energie aus den unsicheren Reservoiren zurück in die sicheren Reservoirs fließt. Dieser Energieaustausch ist letzten Endes dafür verantwortlich, daß die Vorhersagbarkeit atmosphärischer Phänomene nach der stochastisch-dynamischen Methode über längere Zeiträume erstreckt werden kann, als dies mit Hilfe rein deterministischer Methoden möglich ist.

Von großer Bedeutung für die Zukunft der Forschung auf dem Gebiet der Vorhersagbarkeit wird zweifelsohne die Untersuchung des „kanalisierenden“ Einflusses erzwingender äußerer Effekte (nichtadiabatische Energiezufuhr z. B.) sein, sowie die Untersuchung der Unsicherheit der Vorhersage, die durch mangelhafte Parameterisierungsverfahren zustandekommen. Die folgende Abb. 5 stellt z. B. das Energieflußdiagramm für den Fall dar, daß das Spektrum atmosphärischer Prozesse in vier voneinander unterscheidbare Spektralbänder aufteilbar ist (26).

Neben der kinetischen und der totalen potentiellen Energie des großräumigen „Scale“ (Index 4) treten „turbulente“ kinetische Energien von subsynoptischen „Scales“ auf, die untereinander und mit dem großräumigen „Scale“ in Wechselwirkung stehen. Alle auftretenden, z. T. mehrmals gemittelten Korrelationsprodukte müssen parameterisiert werden, d. h. durch Variable des großräumigen „Scale“ ausgedrückt werden. Dadurch

entstehen bei Verwendung der stochastisch-dynamischen Methode zusätzliche Energieboxen, die „uncertain“-Energien enthalten, und man hat zu untersuchen, wie der Energiefluß nicht nur im Spektrum der vier Grund-„Scales“ abläuft, sondern auch noch welche Energieanteile als Folge mangelhafter Parameterisierung in Wechselwirkung mit den „uncertain“-Boxen geraten. Bisher liegen in dieser Richtung jedoch noch keine Ansätze vor.

Literatur

- (1) BJERKNES, V.: Das Problem der Wettervorhersage, betrachtet vom Standpunkte der Mechanik und der Physik. Meteor. Z. 21 (1904) S. 1-7.
- (2) CHARNEY, J. G.: The feasibility of a global observation and analysis system. Bull. Amer. Meteor. Soc. 47 (1966) S. 200-220.
- (3) EPSTEIN, E. S.: Stochastic dynamic prediction. Tellus 21 (1969) S. 737-757.
- (4) EPSTEIN, E. S.; FLEMING, R. J.: Depicting stochastic dynamic forecasts. Report 03743-1-T, Department of Meteorology and Oceanography, The University of Michigan (1970).
- (5) ERTEL, H.: Die Unmöglichkeit einer exakten Wetterprognose auf Grund synoptischer Luftdruckkar-

- ten von Teilgebieten der Erde. Meteor. Z. 58 (1941) S. 309-313.
- (6) FLEMING, R. J.: Concepts and implications of stochastic dynamic prediction. NCAR Cooperative Thesis No. 22 (1970).
- (7) FORTAK, H.: Meteorologie. Berlin und Darmstadt: Carl Habel 1971.
- (8) JASTROW, R.; HALEM, M.: Simulation studies related to GARP. Bull. Amer. Meteor. Soc. 51 (1970) S. 490-513.
- (9) JULIAN, P.; WASHINGTON, W.; HEMBREE, L.; RIDLEY, C.: On the spectral distribution of large-scale atmospheric kinetic energy. J. Atmosph. Sci. 27 (1970) S. 376-387.
- (10) LEITH, C. E.: Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. Phys. Fluids 11 (1968) S. 671-672.
- (11) LEITH, C. E.: Atmospheric predictability and two-dimensional turbulence. J. Atmosph. Sci. 28 (1971) S. 145-161.
- (12) LETTAU, H.: Diffusion in the upper atmosphere. Compendium of Meteorology. Boston, Mass. 1951.
- (13) LETTAU, K.: Austausch. In: LANDOLT-BÖRNSTEIN, Zahlenwerte und Funktionen, 3. Bd. Astronomie und Geophysik. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1952.
- (14) LORENZ, E. N.: Deterministic non-periodic flow. J. Atmosph. Sci. 20 (1963) S. 130-141.
- (15) LORENZ, E. N.: The mechanics of Vacillation. J. Atmosph. Sci. 20 (1963) S. 448-464.
- (16) LORENZ, E. N.: A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. Tellus 17 (1965) S. 321-333.
- (17) LORENZ, E. N.: The predictability of a flow which possesses many scales of motion. Tellus 21 (1969) S. 289-307.
- (18) OBUCHOW, A. M.: Weather and turbulence. IAMAP Presidential Adress, Fourteenth General Assembly of IUGG, Lucerne 1967.
- (19) RICHARDSON, L. F.: Weather prediction by numerical process. Cambridge: Univ. Press 1922.
- (20) ROBINSON, G. D.: Some current projects for global meteorological observation and experiment. Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 93 (1967) S. 409-418.
- (21) SCHERZ, U.: Über die hydro-thermodynamischen Gleichungen im Falle nichthomogener Turbulenz und das Lärmproblem. Beitr. Phys. Atmosph. (1966) S. 69-98.
- (22) TATARSKY, V. I.: The use of dynamic equations in the probability prediction of the pressure field. Izv. Acad. Sci. USSR. Atmosph. oceanic Phys., Washington, D. C. 5 (1969) S. 162-164.
- (23) THOMPSON, P. D.: Uncertainty of initial state as a factor in the predictability of large-scale atmospheric flow patterns. Tellus 9 (1957) S. 275-295.
- (24) WIHN-NIELSEN, A.: On the annual variation and spectral distribution of atmospheric energy. Tellus 19 (1967) S. 540-559.
- (25) WIPPERMANN, F.: Die „Scales“ als ein erstes Ordnungsprinzip für alle Turbulenzvorgänge der Atmosphäre. Promet, Offenbach, 1/2 (1971) S. 16-20.
- (26) FORTAK, H.: Die Methode der Filteranalyse in der atmosphärischen Energetik. Veröff. Inst. Theoret. Meteor. Freie Univ. Berlin 1968.