

Allgemeine 4D- Kontinuum- Physik

H. Fortak

Freie Universität Berlin

1979 - 2019

Vorwort

Die Arbeit schließt an eine kurze Arbeit von C. Eckart aus dem Jahre 1940 an und erweitert sie. ¹

1.: Es fand sich in dieser Arbeit u. A. eine Darstellung der identischen Abbildung von extensiven Größen im Vierdimensionalen, dargestellt mittels eines 3D-Projektionstensors \mathcal{P}_3 in Verbindung mit dem dimensionslosen Vektor der Geschwindigkeit \mathbf{u} ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$). Der Tensor \mathcal{P}_3 vermittelt Projektionen von Gleichungen auf eine räumliche (LAGRANGEsche) Basis von Koordinaten, der Vektor \mathbf{u} diejenigen in Bezug auf die vierte Koordinate s . Der 4D- Identitätstensor

$\mathbb{I}_4 = \mathcal{P}_3 - \mathbf{u}\mathbf{u}$ ($\mathbf{u}\mathbf{u}$ ist hier ein dyadisches Produkt) ermöglicht den Aufbau von allgemeinen 4D- Tensoren.

2.: In der Arbeit treten von vornherein Terme auf, welche irreversible Effekte beschreiben: Energiefluss- Vektoren und Energiedissipation.

3.: Zusätzlich fand sich, dass Energieflüsse einen Beitrag zur Impulsgleichung liefern.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Kontinuum im vierdimensionalen MINKOWSKI- Raum betrachtet d. h. ein System von sehr vielen nicht abzählbaren individuellen LAGRANGEschen Elementen (Teilchen) (äquivalent zu den Verhältnissen in der LAGRANGEschen Form der 3D- Hydrodynamik).

Die individuellen „Elemente“ bewegen sich im 3D- Raum und zusätzlich in Bezug auf die vierte Koordinate s in „Richtung“ des Tangentenvektors \mathbf{u} an die Koordinate s im Sinne wachsender s - Werte. Dabei stehen sie untereinander in nichtlinearer Wechselwirkung (wie etwa durch Reibungseffekte in der 3D- Hydrodynamik). Diese Wechselwirkungen werden durch einen 3D- Tensor $\mathbb{P}_{3,s}$ beschrieben für den die hier behandelte Theorie prinzipiell keine Gleichungen bereitstellt. In der Physik existieren Methoden zur Erfassung derartiger Prozesse wie etwa in der Hydrodynamik oder der statistischen Mechanik.

Das Auftreten des 3D- Tensors \mathbb{P}_3 , führt in der Regel zu irreversibler Energiedissipation und dadurch zu energetisch inhomogenen Feldern. Zum Ausgleich derselben werden (irreversible) Energiefluss- Vektoren $\mathbf{F}_{3,s}$ ausgelöst. In der Gleichung für einen allgemeinen symmetrischen 4D- Tensor (später der Energie-Impulstensor), abgeleitet aus C. Eckart's Arbeit von 1940, d.h.

$$\mathbb{T}_{4,s} = \mathbb{P}_{3,s} - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}) - E\mathbf{u}\mathbf{u}$$

treten neben der Energie E schon im ersten Ansatz die mit Irreversibilität verbundenen Effekte auf. Auch hier erscheinen in der Klammer wieder dyadische Produkte.

Ziele der folgenden Betrachtungen sind:

1. Aufstellung eines $\mathbb{T}_{4,s}$ entsprechenden asymmetrischen Tensors $\mathbb{T}_{4,as}$ und seines Dualen $\mathbb{T}_{4,as}^d$ sowie physikalisch sinnvolle Kombinationen von diesen, d.h., die Aufstellung eines dem Kontinuum zugehörigen 4D- „Weltensors“.

2. Untersuchung der aus 4D- Nabla- Anwendung auf diese 4D- Tensoren entstehenden Gleichungen. Primär interessiert dabei die vektorielle Bilanzgleichung $\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 = -\mathbf{Q}_4$, wobei \mathbf{Q}_4 eine 4D- Quellvektorfunktion darstellt. Aber auch die skalare Gleichung $\nabla_4 \cdot (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4) = \nabla_4 \nabla_4 : \mathbb{T}_4$ ist von Interesse sowie die tensorielle Gleichung $\epsilon_4 : \nabla_4 (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4)$. In der 3D- Kontinuumsphysik (etwa der Hydrodynamik) ist die vektorielle 4D- Bilanzgleichung mit der EULERSchen Bewegungsgleichung verbunden, die skalare Gleichung mit der „Divergenzgleichung“ und die Tensor- Gleichung mit der Wirbelgleichung. Die genannten 4D- Gleichungen sind beispielsweise somit (relativistische) Verallgemeinerungen der Hydrodynamik. Sie beschreiben aber viel mehr, etwa die gesamte Struktur des 4D- Raumes, welches das Kontinuum einnimmt.

3. Es entsteht somit die Frage, ob sich die gesamte Makrophysik der Kontinuen im 4D primär und umfassend aus der Bilanzgleichung $\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 = -\mathbf{Q}_4$ (eine Buchhaltergleichung nach SOMMERFELD) ableiten lässt (extremer Reduktionismus).

4. Geht man davon aus dass Energie und Entropie die grundlegenden Zustandsgrößen der „Welt“ sind, dann ist zu erwarten, dass auch für die Entropie nicht nur ein 4D- „Weltensor“ existiert, sondern, dass dieser ebenfalls einer 4D- Bilanzgleichung der Art genügt: $\nabla_4 \cdot \mathbb{S}_{4,s} = -\Phi_{4,s}$ mit allen Folgerungen, welche vorher genannt wurden. (Managergleichung nach SOMMERFELD).

5. Alle Gleichungen sind in LAGRANGEschem Sinne² zu verstehen, d. h. in einer mitgeführten 4D- Basis, bestehend aus LAGRANGEscher 3D- Vektorbasis, sowie dem zusätzlichen Basisvektor \mathbf{u} ($\mathbf{V} = c\mathbf{u}$ später der Vierervektor). Die zugehörige Koordinate ist s (später $ds = c d\tau$ mit τ als Eigenzeit).

¹ Eckart, Carl: The Thermodynamics of irreversible Processes, Part III. Relativistic Theory of the Simple Fluid. Physical Review, Vol. 58, November 11, 1940.

² It is a proper (or commoving) frame that is attached to an element. The object in this frame is stationary within the frame.

6. Mathematische Methode: 4D- Erweiterung der koordinatenfreien Vektor- Tensor Analysis nach J. W. GIBBS and O. HEAVISIDE.

Inhalt

1. Geometrie des 4D- Kontinuums

1.1 Definitionen und Festlegungen

1.2 Darstellung eines 4D-Tensors 2. Stufe

1.3 Differenzialgeometrie des quellenfreien 4D- Kontinuums

1.31 Allgemeine Strukturgleichungen

1.32 4D- Primärgleichung

1.33 1. Sekundärgleichungen

1.34 2. Sekundärgleichung

2. Physik des 4D-Kontinuums

2.1 Einführung von 4D- Quellvektoren

2.2 Raum und Eigenzeit

2.3 Materie

2.4 Gravitation

2.5 Entropie (Version 1)

2.5 Entropie (Version 2)

2.6 Elektrodynamik der Kontinua (Vollfassung)

2.6.1 Definitionen und Quellvektorfunktion

2.6.2 Zusammengesetztes Feld aus Materie und Elektro- Magnetik

2.6 Elektro- Magnetohydrodynamik leitender Kontinua (Kurzfassung)

2.6.1 Grundgleichungen

2.7 Strahlungs- Hydrodynamik
(Extramanuskript 2010)

3. Anhänge

3.1 Durchführung der Divergenzbildung

3.2 Der nicht- relativistische Spezialfall

3.3 Allgemein- relativistische Behandlung der Gravitation

3.4 4D- Kinematik

3.5 4D- Vektoren und Tensoren

3.6 LORENTZ- Transformation

3.6.1 Einleitung

3.6.2 Invarianz im R^4

3.6.3 Die Bewegung eines materiellen Punktes

3.6.4 Die allgemeine LORENTZ- Transformation

3.6.5 Die LORENTZ- Transformation der Differenziale

3.6.6 Additionstheorem der Geschwindigkeiten

3.7 Kurzableitung für ein ideales Fluid

3.8 Wirbeldynamik

Zusammenfassung ³

Ausgehend von der trivialen Feststellung, dass im Vierdimensionalen 4D- Tensoren existieren (symmetrische, asymmetrische sowie ein aus einem asymmetrischen Tensor gebildeter dualer 4D- Tensor), wird gezeigt, dass sich unter Vorgabe dieser geometrischen Objekte die relativistischen Formen der Grundgleichungen der theoretischen Makrophysik nach 4D- Divergenzbildung und nach Vorgabe von 4D- Quellvektoren umfassend in LAGRANGEScher Form ableiten lassen: Thermo- Hydrodynamik, Strahlungs- Hydrodynamik, Elektrodynamik in elektrisch leitenden Fluiden, Magneto- Hydrodynamik sowie andere denkbare Systemkombinationen. Die grundlegende 4D- Bilanzgleichung, aus der alles folgt, was hier beschrieben wird, lautet:

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 = -\mathbf{Q}_4$$

Es ist dies eine ins Vierdimensionale erweiterte klassische Bilanzgleichung (Buchhalterfunktion) in einfachster Form. Die erste Aufgabe besteht darin, einen 4D- Tensor \mathbb{T}_4 zu finden welcher alle genannten physikalischen Effekte, auch die irreversiblen, in sich vereint.

Die Methode verwendet das C. ECKARTsche Dekompositionsprinzip (1940), nach welchem 4D- Vektoren und 4D- Tensoren unter Verwendung des Vierervektors der Kontinuums- Bewegung in Komponenten parallel zu den Raumkoordinaten und senkrecht zu diesen in Bezug auf einen vierten Basisvektors aufgespalten werden können. Es handelt sich somit um Komponenten parallel zur Weltlinie und senkrecht dazu.

Die Darstellungen der o. a. 4D- Tensoren in dieser Form führt zur Definition zweier verschiedener Beschreibungsweisen der Makrophysik: die Vorgabe eines symmetrischen 4D- Tensors und seiner Interpretation als Energie- Impulstensor ergibt Grundgleichungen eines Typs, den man als NEWTON- Physik bezeichnen könnte, die Vorgabe eines asymmetrischem 4D- Tensors zusammen mit dem ihm zugeordneten dualen 4D- Ten-

³ Entstehung **1978/79** nach Erscheinen des Buches: D. Mihalas: "Stellar Atmospheres". Freeman, San Francisco (1978). **1979/80**: Manuskript eingereicht für Beiträge zur Physik der Atmosphäre, Heft 2, 1980, K. H. Hinkelmann- Heft.(65. Geb.). Nach nicht akzeptierten Änderungswünschen von Gutachtern, Verzicht auf Veröffentlichung an dieser Stelle. 1980 (Februar). **DMT 80**: Poster: "Über Grundlagen der meteorologischen Strahlungs- Hydrodynamik". Veröff. Annalen d. Met. (Neue Folge), Nr.15, Offenbach a. M. 1980. **1982/83** (WS): Vorlesung: "Relativistische Strahlungs- hydrodynamik" (Ausarbeitung durch D. Carius). **1992** (Nov.): Vortrag im Rahmen der C. F. Gauß -Professur der Akademie der Wiss. und der Universität Göttingen: "Über Grundlagen der relativistischen Physik der Fluide, formuliert auf der Basis von C. Eckarts Dekompositionstheorem". **1993**: Vortrag: "Geometrisierung der Physik der Fluide- Relativistische Thermo- Strahlungs- Elektro- Magnetohydrodynamik". Arbeitskreis Theoretische Meteorologie, Kloster Heiligengrabe, 27. September/1. Oktober. **1995**: Vortrag: „Die geometrische Grundstruktur der (gesamten) klassischen Theoretischen Physik“. Arbeitskreis Theoretische Meteorologie, Hotel Tann, Klobenstein/Ritten, Südtirol, 14. Bis 18. September. **2010**: Vortrag: „Strahlungs- Hydrodynamik“. Arbeitskreis Theoretische Meteorologie, Kloster Schöntal 5. bis 10. Oktober.

sor ergibt dagegen ein Grundgleichungspaar eines Typs, dem man als MAXWELL- Physik bezeichnen könnte. Der MAXWELL- Physik ist immer auch eine eigene NEWTON- Physik zugeordnet wenn man aus asymmetrischem und zugeordnetem dualen 4D-Tensor einen symmetrischen 4D- Tensor konstruiert.

Die 4D- Divergenzbildung der so dargestellten 4D- Tensoren gestaltet sich verhältnismäßig einfach, so dass die vollständigen Systeme von allgemeinen Grundgleichungen sowohl der NEWTON- Physik als auch diejenigen der MAXWELL- Physik unter Vorgabe von noch ganz allgemeinen 4D- Quellvektoren angegeben werden können. Diese Gleichungen drücken, da physikalische Überlegungen zu Beginn noch keinerlei Eingang finden müssen, **geometrische Strukturen des 4D- Raumes** aus.

Das System von Grundgleichungen der NEWTON- Physik enthält nach Definition eines noch ganz allgemeinen integrierenden Nenners sogar eine verallgemeinerte 4D- Entropie- Gleichung in welcher sich die rechte Seite als Grundlage für alle späteren Berechnungen der *Entropie-Produktion* erweist. Auch diese Gleichung hat ausschließlich geometrische Wurzeln, von physikalischen Vorstellungen findet sich bis zu diesem Stand der Dinge nichts. Erst die physikalische Vorgabe der 4D- Quellvektoren und damit verbunden, die physikalische Interpretation der 4D-Tensoren lässt physikalische Grundgleichungssysteme entstehen. Die Anwendung der allgemeinen Grundgleichungssysteme auf konkrete physikalische Systeme ist dann lediglich Schreibearbeit.

Diese Gleichungen stellen sich damit lediglich als Eigenschaften des 4D- Raumes dar, sind somit nicht postulierte Gesetze (auch der Erste Hauptsatz der Thermodynamik nicht). Das einzige physikalisch zu postulierende Gesetz betrifft den 4D- Quellfunktionsvektor $\Phi_{4,s}$ in der 4D- Entropiebilanzgleichung

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{S}_{4,s} = -\Phi_{4,s}.$$

Auch dies ist eine ins Vierdimensionale erweiterte klassische Bilanzgleichung (Managerfunktion) in einfachster Form.

So ergeben sich etwa die relativistischen Gleichungen der Thermo- Hydrodynamik: Die EULERSche Impulsgleichung, die Energiegleichung (der Erste Hauptsatz der Thermodynamik), eine skalare Entropiegleichung im Einklang mit Bekanntem sowie eine vektorielle Gleichung für den Entropieflussvektor.

Die Elektrodynamik elektrisch leitender Systeme ergibt sich nach geeigneter Interpretation der Feldfunktionen in sehr verallgemeinerter Form, d. h. in Bezug auf ein allgemein beschleunigtes inhomogenes Kontinuum, ebenfalls deduktiv aus dem allgemeinen Grundgleichungssystem der übergeordneten MAXWELL- Physik. Interessanterweise ergeben sich die 4D- Quellvektoren der MAXWELL- Physik als 4D- divergenzfrei, so dass sich diese und andere Erhaltungssätze (Kontinuitätsgleichung der MAXWELL- Physik) ebenfalls als Teile der

geometrischen Struktur des 4D-Raumes erweisen.

Alle Gleichungen sind im LAGRANGESchen Sinne formuliert d. h. es sind Gleichungen die ein im bewegten System mitschwimmender Beobachter benutzen muss. Der Übergang zu den Gleichungen, welche ein in einem raumfesten Laborsystem arbeitender Beobachter benutzen muss, kann mittels einer im Anhang abgeleiteten sehr allgemeinen LORENTZ- Transformation vorgenommen werden.

In der Anwendung auf die phänomenologische Strahlungstheorie (2010) wird eine interessante und einfache Darstellung des 4D- Energiedichtetensors eines Photonenensembles gefunden. Die berühmte Strahlungsübertragungsgleichung erweist sich dann als eine starke Vereinfachung der Energiegleichung, welche sich aus dem 4D- Energiedichtetensors eines Photonenensembles ergibt. Die über die Frequenz und den Raumwinkel integrierten Gleichungen lassen hinsichtlich der Entropieproduktion durch Strahlungsprozesse erkennen, dass der sog. Carnot- Faktor hier eine bedeutende Rolle spielt.

Die Additivität der Energie- Impuls- Tensoren ermöglicht die Angabe der Grundgleichung- Systeme der Hydro- Thermodynamik in Wechselwirkung mit elektrodynamischer Strahlung und/oder mit elektrodynamischen Feldern im allgemeinen: Strahlungshydrodynamik, Magnetohydrodynamik u. a.. Entsprechende Gleichungssysteme werden angegeben, wobei in allen Fällen die Entropiegleichung zuzüglich der zugehörigen Entropieproduktion erscheint. Dies ermöglicht es dann, auf die allgemeine Grundlage der sog. Gibbs- Gleichung einzugehen.

Die deduktive Ableitung aller Gleichungen der relativistischen Makrophysik beinhaltet bereits vom Ansatz her, (ECKART 1940), **irreversible Prozesse** in einem sich beschleunigt und deformiert bewegenden Kontinuum.

Im Gegensatz zur üblichen Schreibweise welche den allgemeinen 4D- RICCI- Tensor- Kalkül verwendet wird in dieser Arbeit eine vierdimensionale Erweiterung des 3D- GIBBS- HEAVISIDE- Vektor- Tensor- Kalküls verwendet, d. h. **es wird koordinatenfrei gerechnet!** Dies eröffnet die Möglichkeit, die erwähnten Zweige der Physik der Kontinua elegant deduktiv und anschaulich aus einer gemeinsamen Wurzel heraus abzuleiten. Hinzu tritt, dass der GIBBS- HEAVISIDE- Kalkül einen Lesbarkeitsvorteil gegenüber dem RICCI- Kalkül besitzt.

Formelzusammenstellung

Struktur des 4D- Raumes

Die Bedeutung der im Folgenden auftretenden Symbole wird im Text angegeben. Die hier vorangestellte Zusammenstellung der Grundformeln dient dem Rückgriff auf diese im Falle späterer Anwendungen auf physikalische Systeme. Sie geben in dieser Übersicht im Grunde die geometrische Grundstruktur des 4D- MINKOWSKI- Raumes wieder.

Ein **symmetrischer** 4D- Tensor, gegeben durch

$$\mathbb{T}_{4,s} = \mathbb{P}_{3,s} - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}) - \mathbf{E}\mathbf{u}\mathbf{u} \quad (\text{Z} - 1.1)$$

besitzt als 4D- Divergenz:

$$\begin{aligned} -\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,s} &= \\ &= \left((\mathbf{E}\mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} + \frac{D_{III}\mathbf{F}_{3,s}}{Ds} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} \right) \cdot \mathcal{P}_3 \\ &+ \left(\frac{D_{III}\mathbf{E}}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s} - \mathbb{P}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{u} + 2 \mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \mathbf{u} \quad (\text{Z} - 1.2) \end{aligned}$$

Ein **asymmetrischer** 4D- Tensor, gegeben durch

$$\mathbb{T}_{4,as} = \epsilon_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d + (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,as} - \mathbf{F}_{3,as}\mathbf{u}) \quad (\text{Z} - 2.1)$$

besitzt als 4D- Divergenz:

$$\begin{aligned} \nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,as} &= \\ &= \left(\frac{D_{II}\mathbf{F}_{3,as}}{Ds} - \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^d \right) \cdot \mathcal{P}_3 - (\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as})\mathbf{u} \quad (\text{Z} - 2.2) \end{aligned}$$

Der ihm zugeordneter **Duale** 4D- Tensor ist gegeben durch

$$\mathbb{T}_4^d = \epsilon_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as} - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,as}^d - \mathbf{F}_{3,as}^d\mathbf{u}) \quad (\text{Z} - 3.1)$$

Die 4D- Divergenz ist:

$$\begin{aligned} -\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,as}^d &= \quad (\text{Z} - 3.2) \\ &= \left(\frac{D_{II}\mathbf{F}_{3,as}^d}{Ds} + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as} \right) \cdot \mathcal{P}_3 - (\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d)\mathbf{u} \end{aligned}$$

Der aus asymmetrischem und zugeordnetem Dualem gebildete zugehörige **"Energie- Impulstensor"** ist gegeben durch

$$\mathbb{T}_{4,s}^D = \frac{1}{2} [\mathbb{E}_{4,as} \cdot \mathbb{E}_{4,as} + \mathbb{E}_{4,as}^d \cdot \mathbb{E}_{4,as}^d]$$

Er berechnet sich als symmetrischer 4D- Tensor (s.o.) zu

$$\mathbb{T}_{4,s}^D = \mathbb{P}_{3,s}^D - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s}^D + \mathbf{F}_{3,s}^D\mathbf{u}) - \mathbf{E}^D\mathbf{u}\mathbf{u} \quad (\text{Z} - 4.1)$$

wobei die zusammengesetzten Feldgrößen durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{3,s}^D &= (\mathbf{F}_{3,as}\mathbf{F}_{3,as} + \mathbf{F}_{3,as}^d\mathbf{F}_{3,as}^d) - \mathbf{E}^D\mathcal{P}_3 \\ \mathbf{F}_{3,s}^D &= \mathbf{F}_{3,as} \times \mathbf{F}_{3,as}^d \quad (1.22) - \\ &(1.24) \end{aligned}$$

$$2\mathbf{E}^D = (\mathbf{F}_{3,as})^2 + (\mathbf{F}_{3,as}^d)^2$$

gegeben sind. Die 4D- Divergenz ist analog zu

$$\begin{aligned} -\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,s}^D &= \quad (\text{Z} - 1.2) \\ &= \left((\mathbf{E}^D\mathcal{P}_3 - \mathbf{F}_{3,s}^D) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^D + \frac{D_{III}\mathbf{F}_{3,s}^D}{Ds} + \mathbf{F}_{3,s}^D \cdot \nabla_3 \mathbf{u} \right) \cdot \mathcal{P}_3 + \\ &+ \left(\frac{D_{III}\mathbf{E}^D}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^D - \mathbb{P}_{3,s}^D : \nabla_3 \mathbf{u} + 2 \mathbf{F}_{3,s}^D \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \mathbf{u} \quad (\text{Z} - 4.2) \end{aligned}$$

In den Darstellungen für die Divergenzen ist eine Aufspaltung in einen Anteil erkennbar, der dem 3D- Raum zugeordnet ist und in einen solchen, der als Komponente in Richtung der vierten Koordinate, s ("zeitliche" Koordinate), aufgefasst werden kann.

Die nachstehend eingeführten Abkürzungen haben wichtige geometrische Bedeutungen:

Nulldimensionale (Punkt) "individuelle" Ableitung:

$$\frac{D_0\mathbf{A}_3}{Ds} \cdot \mathcal{P}_3 = \frac{D\mathbf{A}_3}{Ds} \cdot \mathcal{P}_3, \quad \frac{D_0\mathbf{A}_3}{Ds} \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{A}_3 \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \quad (\text{Z} - 5.1)$$

Eindimensionale (Linie) "individuelle" Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{D_I\mathbf{A}_3}{Ds} \cdot \mathcal{P}_3 &= \frac{D\mathbf{A}_3}{Ds} \cdot \mathcal{P}_3 + (\nabla_3\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A}_3 \\ \frac{D_I\mathbf{A}_3}{Ds} \cdot \mathbf{u} &= -\mathbf{A}_3 \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \quad (\text{Z} - 5.2) \end{aligned}$$

Zweidimensionale (Fläche) "individuelle" Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{D_{II}\mathbf{A}_3}{Ds} \cdot \mathcal{P}_3 &= \frac{D\mathbf{A}_3}{Ds} \cdot \mathcal{P}_3 + (\nabla_3 \cdot \mathbf{u})\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_3 \cdot (\nabla_3\mathbf{u}) \\ \frac{D_{II}\mathbf{A}_3}{Ds} \cdot \mathbf{u} &= -\mathbf{A}_3 \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \quad (\text{Z} - 5.3) \end{aligned}$$

Dreidimensionale (Volumen) "individuelle" Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{D_{III}\mathbf{A}_3}{Ds} \cdot \mathcal{P}_3 &= \frac{D\mathbf{A}_3}{Ds} \cdot \mathcal{P}_3 + (\nabla_3 \cdot \mathbf{u})\mathbf{A}_3 \quad (\text{Z} - 5.4) \\ \frac{D_{III}\mathbf{A}_3}{Ds} \cdot \mathbf{u} &= -\mathbf{A}_3 \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds}, \end{aligned}$$

wobei im Folgenden nur die beiden letzten Gleichungsgruppen Verwendung finden und hier nur als Abkürzungen verstanden werden sollen.

Früheren Arbeiten des Verfassers entnommen, (FORTAK, 1952, 2004), gelten die folgenden **Vertauschungsoperationen** (verallgemeinert auch im 4D):

$$\nabla_4 \left(\frac{D_0 \dots}{Ds} \right) = \frac{D_I}{Ds} (\nabla_4 \dots) \quad (\text{Z} - 6.1)$$

$$\epsilon_4 : \nabla_4 \left(\frac{D_I \dots}{Ds} \right) = \frac{D_{II}}{Ds} (\epsilon_4 : \nabla_4 \dots) \quad (\text{Z} - 6.2)$$

$$\nabla_4 \cdot \left(\frac{D_{II} \dots}{Ds} \right) = \frac{D_{III}}{Ds} (\nabla_4 \cdot \dots) \quad (\text{Z} - 6.3)$$

Im Dreidimensionalen ergeben sich hieraus nach Integration über Linien und Flächen bzw. Volumina anschauliche Verhältnisse (Verallgemeinerung der Leibnizregel für Parameterintegrale).

$$\frac{D_0}{Ds} \int_{C_3(s)} d\mathbf{c}_3 \cdot \dots = \int_{C_3(s)} d\mathbf{c}_3 \cdot \frac{D_I \dots}{Ds} \quad (\text{Z} - 7.1)$$

$$\frac{D_0}{Ds} \iint_{F_3(s)} d\mathbf{f}_3 \cdot \dots = \iint_{F_3(s)} d\mathbf{f}_3 \cdot \frac{D_{II} \dots}{Ds} \quad (\text{Z} - 7.2)$$

$$\frac{D_0}{Ds} \iiint_{V_3} d\mathbf{v}_3 \cdot \dots = \iiint_{V_3} d\mathbf{v}_3 \cdot \frac{D_{III} \dots}{Ds} \quad (\text{Z} - 7.3)$$

Hierbei sind (LAGRANGE'sch gesehen) $d\mathbf{c}_3$ ein Linienelement, $d\mathbf{f}_3$ ein Flächenelement und $d\mathbf{v}_3$ ein Volumenelement.

In der Folge wird anstelle von D_0/Ds nur D/Ds geschrieben.

1. Geometrie des 4D-Kontinuums

1.1 Definitionen und Festlegungen

Der vierdimensionale Raum (4D) wird als ein (differenzierbares) Kontinuum aufgefasst. Er besteht aus einer nicht abzählbar großen Zahl von „Elementen“ (materiellen Partikeln, o. a.) welche sich, im (4D) aus einer **Anfangsposition** heraus **beschleunigt** bewegen und dabei auch den "Raum" **deformieren**. Untereinander befinden sie sich in **nichtlinearer Wechselwirkung**, charakterisiert durch einen 3D- Tensor \mathbb{P}_3 , mit Folgen, die in der Physik zu Inhomogenität im Feld der Energie \mathbf{E} führt und dadurch Anlass zu ausgleichende Energieflussvektoren \mathbf{F}_3 gibt. Die **nichtlinearen Wechselwirkungen** äußern sich je nach betrachtetem System, etwa durch Reibung o. a.. Sie sind im Rahmen dieser Betrachtungen prinzipiell nicht durch prognostische Gleichungen bezüglich der vierten Koordinate zu behandeln sondern - etwa durch die statistische Mechanik - vorzugeben. Es ist aber möglich derartige Gleichungen für den Tangentenvektor \mathbf{u} der vierten Koordinate (Impulsleichung in der Physik), die Energie \mathbf{E} (Energiegleichung in der Physik) sowie, über eine vektorielle Entropiegleichung, für den Energieflussvektor \mathbf{F}_3 , herzuleiten. Eine skalare Entropiegleichung regelt die Richtung der auftretenden Ereignisse.

Es existiert für das "Gesamtsystem" eine **charakteristische Geschwindigkeit** \mathbf{c} . Diese **kann** später mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum identifiziert werden. Damit begäbe man sich auf das Gebiet der Relativitätstheorie.

Im vorgenannten 4D- Kontinuum ist jeder sich bewegende räumliche Punkt durch LAGRANGESche Koordinaten charakterisiert. Es handelt sich dabei um ein sog. "Ruhesystem". Im Vierdimensionalen tritt zu den Basisvektoren des LAGRANGESchen Systems \mathbf{g}_k zusätzlich der Basisvektor \mathbf{u} ($\equiv \mathbf{g}_4$ möglich, später aber unanschaulich) in Richtung einer vierten Koordinate s (in der ART Weltlinie, Trajektorie von sich im 4D bewogender Partikel oder auch als Linie aufeinander folgender Ereignisse aufzufassen). Dieser besitze die besondere Eigenschaft (C. Eckart, 1940)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1 \tag{1.1. (1)}$$

Die vorstehende Festsetzung für \mathbf{u} ist bekanntermaßen, für alles Folgende von entscheidender Bedeutung!

Als Tangentenvektor an die Koordinate s , hängt \mathbf{u} von den 3D- LAGRANGESchen Koordinaten ab, und ist zu deren Basisvektoren \mathbf{g}_k orthogonal.

Es wird lokal ein flacher MINKOWSKI- Raum vorausgesetzt, dessen Metrik durch den **MINKOWSKI-Tensor** \mathbb{I}_4 bestimmt ist.

Nach (C. ECKART, 1940) verwendet man zum Aufbau desselben den **3D- Projektionstensor** \mathcal{P}_3 der die Projektion auf die räumliche Vektorbasis vermittelt

zusammen mit dem Basisvektor \mathbf{u} der dies bezüglich des Basisvektors \mathbf{u} vornimmt und schreibt ⁴:

$$\mathbb{I}_4 = \mathcal{P}_3 - \mathbf{u}\mathbf{u}. \tag{1.1.2}$$

Der metrische Tensor \mathbb{I}_4 vermittelt die identische Abbildung extensiver Größen. Die erwähnte Orthogonalität zwischen räumlichen Basisvektoren \mathbf{g}_k und \mathbf{u} schreibt sich als:

$$\mathcal{P}_3 \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Der im Folgenden oft auftretende 4D- LEVI-CIVITA- Pseudotensor ϵ_4 ist gegeben durch (in vereinfachter kartesischer Form mit \mathbb{I}_3 als 3-D Einheitstensor)

$$\epsilon_4 = (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{u}\mathbb{I}_3) \cdot \epsilon_3 - \epsilon_3 \cdot (\boldsymbol{\phi} - \mathbb{I}_3\mathbf{u}) \tag{1.3}$$

$$\epsilon_3 = -\mathbb{I}_3 \times \mathbb{I}_3 \text{ und}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{u}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k}$$

Der 4D- Nabla- Operator ist definiert durch:

$$\nabla_4 = \mathbb{I}_4 \cdot \nabla_4 = \nabla_3 - \mathbf{u}\mathbf{u} \cdot \nabla_4 = \nabla_3 - \mathbf{u} \frac{D}{Ds} \tag{1.4}$$

$$\text{mit } \frac{D}{Ds} = \mathbf{u} \cdot \nabla_4 \tag{1.5}$$

(D/Ds ist eine LAGRANGESche Ableitung!).

Es ist außerdem (wichtig!)

$$\nabla_4 \mathbb{I}_4 = 0 \text{ und } \nabla_4 \epsilon_4 = 0 \tag{1.6}$$

und dies gilt ebenso für alle sonstigen ∇_4 Ableitungen von \mathbb{I}_4 und ϵ_4 .

1.2 Darstellung eines 4D- Tensors 2. Stufe

Im 4D existieren allgemeine **gemischt kovariant – kontravariante und 4D- differenzierbare 4D- Tensoren zweiter Stufe** \mathbb{T}_4 (\mathbb{T}_j^i) mit existierendem $\nabla_4 \mathbb{T}_4$. In der Physik beschreibt ein solcher etwa alle Bilanzgleichungen der **Energie- Impulsphysik**, ein zweiter diejenigen der **Entropiephysik**. Dieser lässt sich folgendermaßen darstellen:

Da der Tensor \mathbb{I}_4 im 4D die identische Abbildung vermittelt ist zunächst:

$$\mathbb{T}_4 = \mathbb{I}_4 \cdot \mathbb{T}_4 \cdot \mathbb{I}_4$$

und so mit (1.2):

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_4 &= \mathbb{I}_4 \cdot \mathbb{T}_4 \cdot \mathbb{I}_4 = (\mathcal{P}_3 - \mathbf{u}\mathbf{u}) \cdot \mathbb{T}_4 \cdot (\mathcal{P}_3 - \mathbf{u}\mathbf{u}) = \\ &= \mathcal{P}_3 \cdot \mathbb{T}_4 \cdot \mathcal{P}_3 - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4 \cdot \mathcal{P}_3) - (\mathcal{P}_3 \cdot \mathbb{T}_4 \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \\ &\quad - (-\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4 \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{u} \end{aligned}$$

Die Aufspaltung in symmetrische und asymmetrische Anteile von \mathbb{T}_4 geschieht gemäß

$$\mathbb{T}_4 = \frac{1}{2}(\mathbb{T}_4 + \mathbb{T}_4^T) + \frac{1}{2}(\mathbb{T}_4 - \mathbb{T}_4^T) = \mathbb{T}_{4,s} + \mathbb{T}_{4,as}$$

wobei \mathbb{T}_4^T der Transponierte von \mathbb{T}_4 ist,

Definiert man nun Gruppe (1.7)

$$\mathcal{P}_3 \cdot \mathbb{T}_4 \cdot \mathcal{P}_3 = \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}_{3,s} + \mathbb{P}_{3,as} = \mathbb{P}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \epsilon_3$$

$$\mathcal{P}_3 \cdot \mathbb{T}_4^T \cdot \mathcal{P}_3 = \mathbb{P}_3^T = \mathbb{P}_{3,s} - \mathbb{P}_{3,as} = \mathbb{P}_{3,s} - \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \epsilon_3$$

$$\mathcal{P}_3 \cdot \mathbb{T}_4 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,as}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4 \cdot \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_3 \cdot \mathbb{T}_4^T \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}_3^T = \mathbf{F}_{3,s} - \mathbf{F}_{3,as}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4 \cdot \mathbf{u} = -E,$$

⁴ Dyadische Produkte $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ werden hier einfach als \mathbf{AB} geschrieben!

wobei davon Gebrauch gemacht wurde, dass ein asymmetrischer 3D- Tensor $\mathbb{P}_{3,as}$ durch seinen Vektor (seinem "Dualen") darstellbar ist:

$$\mathbb{P}_{3,as} = \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \epsilon_3 \quad \text{mit} \quad \mathbb{P}_{3,as} \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d = 0 \quad (1.8)$$

und mit der Umkehrung $\mathbf{F}_{3,as}^d =$

$$\frac{1}{2} \mathbb{P}_{3,as} : \epsilon_3 \quad (1.8a)$$

Es ist für spätere Verwendung weiterhin nützlich:

$$\begin{aligned} \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,as} &= \nabla_3 \mathbf{F}_{3,as}^d : \epsilon_3 \\ &= -\nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^d \end{aligned} \quad (1.8b)$$

$$\begin{aligned} \nabla_3 \times \mathbb{P}_{3,as} &= \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \epsilon_3 \\ &= 2 \nabla_3 \mathbf{F}_{3,as}^d \end{aligned} \quad (1.8c)$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d = 0 \quad (1.8d)$$

Mit (1.8) ergibt sich als allgemeine Darstellung eines ganz allgemeinen 4D- Tensors \mathbb{T}_4 :

$$\mathbb{T}_4 = \mathbb{P}_{3,s} - (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s} \mathbf{u}) - \mathbf{E} \mathbf{u} \mathbf{u} + \quad (1.9)$$

$$+ \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \epsilon_3 + (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,as} - \mathbf{F}_{3,as} \mathbf{u}) = \mathbb{T}_{4,s} + \mathbb{T}_{4,as}$$

Dies ist zugleich auch die gewünschte Aufspaltung in einen **symmetrischen** und in einen **asymmetrischen Anteil**.

Die Spur von (1.9) ist allein gegeben durch

$$\text{Spur } \mathbb{T}_4 = \text{Spur } \mathbb{T}_{4,s} = \text{Spur } \mathbb{P}_{3,s} + \mathbf{E} = \mathbf{T} \quad (1.9a)$$

Der asymmetrische Anteil besitzt stets noch (wie im 3D, s. o.) einen (quellfreien) **zugeordneten dualen 4D- Tensor** (4D- Verallgemeinerung von(1.8)):

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{4,as}^d &= \frac{1}{2} [\mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \epsilon_3 + (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,as} - \mathbf{F}_{3,as} \mathbf{u})] : \epsilon_4 = \\ &= \mathbf{F}_{3,as} \cdot \epsilon_3 - (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,as}^d - \mathbf{F}_{3,as}^d \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Hilfsformeln für die Ableitung des Dualen sind

$$\mathbf{a}_3 \cdot \epsilon_3 : \epsilon_4 = 2(\mathbf{a}_3 \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{a}_3),$$

$$\mathbf{b}_3 \mathbf{u} : \epsilon_4 = -\mathbf{b}_3 \cdot \epsilon_3,$$

$$\mathbf{u} \mathbf{b}_3 : \epsilon_4 = \mathbf{b}_3 \cdot \epsilon_3.$$

Aus asymmetrischem und zugeordnetem dualen 4D- Tensor lässt sich ein in späteren Anwendungen benötigter weiterer symmetrischer 4D- Tensor bilden:

$$\mathbb{T}_{4,s}^D = \frac{1}{2} [\mathbb{T}_{4,as} \cdot \mathbb{T}_{4,as} + \mathbb{T}_{4,as}^d \cdot \mathbb{T}_{4,as}^d] \quad (1.11)$$

Er berechnet sich zu

$$\mathbb{T}_{4,s}^D = \mathbb{P}_{3,s}^D - (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,s}^D + \mathbf{F}_{3,s}^D \mathbf{u}) - \mathbf{E}^D \mathbf{u} \mathbf{u} \quad (1.12)$$

mit den zusammengesetzten Feldgrößen

$$\mathbb{P}_{3,s}^D = (\mathbf{F}_{3,as} \mathbf{F}_{3,as} + \mathbf{F}_{3,as}^d \mathbf{F}_{3,as}^d) - \mathbf{E}^D \mathcal{P}_3,$$

$$\mathbf{F}_{3,s}^D$$

$$= \mathbf{F}_{3,as} \times \mathbf{F}_{3,as}^d, \quad \text{Gruppe (1.13)}$$

$$2\mathbf{E}^D = (\mathbf{F}_{3,as})^2 + (\mathbf{F}_{3,as}^d)^2$$

Im 4D existieren somit die vier 4D- Tensoren:

$$\mathbb{T}_{4,s} = \mathbb{P}_{3,s} - (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s} \mathbf{u}) - \mathbf{E} \mathbf{u} \mathbf{u} \quad \text{Gruppe (1.14)}$$

$$\mathbb{T}_{4,as} = \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \epsilon_3 + (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,as} - \mathbf{F}_{3,as} \mathbf{u})$$

$$\mathbb{T}_{4,as}^d = \mathbf{F}_{3,as} \cdot \epsilon_3 - (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,as}^d - \mathbf{F}_{3,as}^d \mathbf{u})$$

$$\mathbb{T}_{4,s}^D = \mathbb{P}_{3,s}^D - (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,s}^D + \mathbf{F}_{3,s}^D \mathbf{u}) - \mathbf{E}^D \mathbf{u} \mathbf{u}$$

Der 4D- Tensor $\mathbb{T}_{4,s}$ charakterisiert das, was man als NEWTON- Physik (Energie- Impulsphysik) ansehen könnte, die drei anderen zusammen dasjenige, was als MAXWELL- Physik (MAXWELL- Gleichungen und zugehörige Energie- Impulsphysik) anzusehen wäre.

Es ist bemerkenswert, dass sich im Vierdimensionalen quasi **aus dem Nichts heraus** (aus \mathbb{T}_4), diese vier 4D- Tensoren herleiten lassen deren Struktur bereits die Nähe zu physikalischen Systemen erkennen lässt.

Neben der "individuellen" Vektorbasis, gegeben durch $\mathcal{P}_3(\mathbf{g}_k)$ und $\mathbf{u}(\mathbf{g}_k)$, bestimmen im 4D somit ein 3D- Tensor $\mathbb{P}_{3,s}$ (vorzugeben), drei 3D- Vektoren $\mathbf{F}_{3,s}$, $\mathbf{F}_{3,as}$, $\mathbf{F}_{3,as}^d$ und ein Skalar E gemeinsam einen allgemeinen 4D- Tensor \mathbb{T}_4 . Sie zeigen Eigenschaften, die später einer **Physik irreversibler Prozesse** im Kontinuum entsprechen. Es ist sehr bemerkenswert, dass (wie schon bei C. Eckart) bei der Entwicklung eines ganz allgemeinen 4D- Tensors Terme auftreten, welche zeigen, **das im 4D- Raum bereits Irreversibilität „eingebettet“ ist**.

1.3 Differenzialgeometrie des quellfreien 4D- Kontinuums

1.3.1 Allgemeine Strukturgleichungen

4D- Divergenz und 4D- "Rotation" sind definierbare Differenzialoperationen im 4D- Feld. Etwa $\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4$, $\nabla_4 \cdot (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4)$, $\epsilon_4 : \nabla_4 (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4)$ Die erste Gleichung führt auf eine 4D- Vektorgleichung, die zweite auf eine skalare und die Dritte auf eine 4D- Tensor- Gleichung 2. Stufe.

Die **Grundstruktur des 4D- Kontinuums** erhält man, wenn das Innere eines 4D- Volumens **frei** von 4D- **Quellvektoren** ist.

Ausgangsgleichung ist die 4D- Bilanzgleichung (4D- Primärgleichung): $\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 = 0$. Dies ist, wie schon gesagt, eine 4D- Vektorgleichung auf welche die oben angegebenen Operationen angewendet werden können. Alles steht im Einklang mit dem, was analog in der 3D- Hydrodynamik auftritt.

Wir definieren als **Strukturgleichungen** des 4D- Kontinuums die folgenden drei Fundamentalgleichungen: Eine skalare Gleichung (1. Sekundärgleichung)

$$\nabla_4 \cdot (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4) = 0, \quad (1.15)$$

eine Vektor- Gleichung (4D- Primärgleichung)

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 = 0 \quad (1.16)$$

eine Tensor- Gleichung (2. Sekundärgleichung)

$$\epsilon_4 : \nabla_4 (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4) = 0 \quad (1.17)$$

wobei Gleichung (1.17) aus dem asymmetrischen 4D- Tensor zweiter Stufe

$$[\nabla_4 (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4) - (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4) \nabla_4]$$

als dessen "Dualer", gegeben durch:

$$[\nabla_4 (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4) - (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4) \nabla_4]^d =$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_4 : [\nabla_4 (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4) - (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4) \nabla_4] =$$

$$= \epsilon_4 : \nabla_4 (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4), \text{ hervorgegangen ist.}$$

Die drei Gleichungen (1.15) bis (1.17) entsprechen in der konventionellen 3D- Hydrodynamik den kräftefreien Grundgleichungen: Divergenz-Gleichung,

Bewegungsgleichung zusammen mit Erstem Hauptsatz der Thermodynamik und Wirbelgleichung.

1.32 4D- Primärgleichung

Die Gleichung, hier als Primärgleichung bezeichnet,

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 = 0$$

bildet den Kern aller folgenden Betrachtungen. Hat man die 4D- Divergenzen für die vier Tensoren der Gruppe (1.14) berechnet, dann ist die mathematische Arbeit, auch für alle Anwendungen in der Physik, praktisch schon geleistet.

Als Einleitung zu Folgendem zeigen wir, dass die Primärgleichung die Form einer klassischen Bilanzgleichung, hier im Vierdimensionalen besitzt.

Dazu schreiben wir

$$\mathbb{T}_4 = \mathbb{I}_4 \cdot \mathbb{T}_4 = (\mathcal{P}_3 - \mathbf{u}\mathbf{u}) \cdot \mathbb{T}_4$$

und bilden aus der Differenz der beiden Anteile die 4D- Divergenz:

$$\begin{aligned} \nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 &= \nabla_4 \cdot (\mathcal{P}_3 \cdot \mathbb{T}_4) - \nabla_4 \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4)) = 0 \\ -\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 &= -\nabla_4 \cdot (\mathcal{P}_3 \cdot \mathbb{T}_4) + \nabla_4 \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4)) = 0 \\ \nabla_4 \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4)) - \nabla_4 \cdot (\mathcal{P}_3 \cdot \mathbb{T}_4) &= 0 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \nabla_4 \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4)) &= \mathbf{u} \cdot \nabla_4 (\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4) + (\nabla_4 \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4) = \\ &= \frac{D}{Ds} (\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4) + (\nabla_4 \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4) = \frac{D_{III}}{Ds} (\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4) \end{aligned}$$

und somit folgt in völliger Äquivalenz zu

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 = 0$$

als klassische (Ausgangs-) Bilanzgleichung im 4D:

$$\frac{D_{III}}{Ds} (\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4) - \nabla_4 \cdot (\mathcal{P}_3 \cdot \mathbb{T}_4) = 0$$

Integriert man über ein mitschwimmendes Volumen V_3 dann erhält man mit $\nabla_4 = \nabla_3 - \mathbf{u} D/Ds$ als Integralform

$$\begin{aligned} \frac{D}{Ds} \iiint_{V_3} dV_3 (\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4) - \oint_{O_3} d\mathbf{O}_3 \cdot (\mathcal{P}_3 \cdot \mathbb{T}_4) &= \\ = \iiint_{V_3} dV_3 \frac{Du}{Ds} \cdot (\mathcal{P}_3 \cdot \mathbb{T}_4) \end{aligned}$$

wobei der „Quellterm“ auf der rechten Seite aus der vierdimensionalen Behandlung des Problems folgt.

Für einen symmetrischen Tensor

$$\mathbb{T}_{4,s} = \mathbb{P}_{3,s} - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}) - \mathbf{E}\mathbf{u}\mathbf{u}$$

ist beispielsweise

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}_4) = \mathbf{F}_{3,s} \cdot \mathbf{E}\mathbf{u} \quad (\mathcal{P}_3 \cdot \mathbb{T}_4) = \mathbb{P}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{D}{Ds} \iiint_{V_3} dV_3 (\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{E}\mathbf{u}) - \oint_{O_3} d\mathbf{O}_3 \cdot (\mathbb{P}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}) &= \\ = \iiint_{V_3} dV_3 \frac{Du}{Ds} \cdot (\mathbb{P}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Dies wäre, noch exakt, zusammengefasst die Integralform der „Energie- Impuls“- Gleichung.

(Würde man formal und nicht begründbar aufspalten

$$\begin{aligned} \frac{D}{Ds} \iiint_{V_3} dV_3 \mathbf{F}_{3,s} - \oint_{O_3} d\mathbf{O}_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} &= \iiint_{V_3} dV_3 \frac{Du}{Ds} \cdot \mathbb{P}_{3,s} \\ \frac{D}{Ds} \iiint_{V_3} dV_3 \mathbf{E}\mathbf{u} - \oint_{O_3} d\mathbf{O}_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u} &= \iiint_{V_3} dV_3 \frac{Du}{Ds} \cdot \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u} \end{aligned}$$

und ginge zur Differentialform zurück, etwa zu

$$\frac{D_{III}\mathbf{F}_{3,s}}{Ds} - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} = \frac{Du}{Ds} \cdot \mathbb{P}_{3,s}$$

ergäbe sich schon hier nicht die vollständige Version.)

Die Ausgangsgleichung hierfür könnte ganz allgemein unter Verwendung der Tensoren der Gruppe (1.14) zur Herleitung aller folgenden Gleichungssysteme verwendet werden. Etwa für

$$\frac{D_{III}}{Ds} (\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{E}\mathbf{u}) - \nabla_4 \cdot (\mathbb{P}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}) = 0$$

wobei der Basisvektor \mathbf{u} mitdifferenziert werden muss.

Im Anhang unter 3.1 werden die mathematischen Ableitungen allerdings in übersichtlicherer Weise wiedergegeben. Hier folgen die Ergebnisse der entsprechenden dort durchgeführten Berechnungen.

Es ergibt sich für die vier Tensoren:

1) Symmetrischer 4D- Tensor

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{4,s} &= \mathbb{P}_{3,s} - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}) - \mathbf{E}\mathbf{u}\mathbf{u} = \mathbb{T}_{4,s} \cdot \mathbb{I}_4 = \\ &= (\mathbb{P}_{3,s} - \mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s}) \cdot \mathcal{P}_3 - (\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{E}\mathbf{u})\mathbf{u} \end{aligned}$$

Hier ist die 4D- Divergenz gegeben durch:

$$\begin{aligned} -\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,s} &= \\ &= \left[(\mathbf{E}\mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}) \cdot \frac{Du}{Ds} - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{D_{III}\mathbf{F}_{3,s}}{Ds} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} \right) \right] \cdot \mathcal{P}_3 + \\ &+ \left[\frac{D_{III}\mathbf{E}}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s} - \mathbb{P}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{u} + 2 \mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{Du}{Ds} \right] \mathbf{u} \\ &= \mathbf{A}_{4,s} = \mathbf{A}_{3,s} + \mathbf{A}_{0,s}\mathbf{u} = 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Die Projektion auf die räumliche Basis ist ($\mathbf{A}_{3,s}$):

$$\left[(\mathbf{E}\mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}) \cdot \frac{Du}{Ds} - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} + \left(\frac{D_{III}\mathbf{F}_{3,s}}{Ds} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} \right) \right] \cdot \mathcal{P}_3 = 0 \quad (1.19)$$

diejenige in Bezug auf \mathbf{u} ($\mathbf{A}_{0,s}$):

$$\frac{D_{III}\mathbf{E}}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s} - \mathbb{P}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{u} + 2 \mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{Du}{Ds} = 0 \quad (1.20)$$

Diese Gleichungen bilden später die Grundlage der so genannten NEWTON- Physik (Energie- Impulsphysik). Hierbei findet sich in der zweiten Zeile von (1.19) ein (allgemein nicht beachteter) Term auf, den bereits C, Eckart in sehr vereinfachter Form erwähnt: **Impulsübertragung im Zusammenhang mit existierenden Energieflussvektoren.**

2) Asymmetrischer 4D- Tensor

$$\mathbb{T}_{4,as} = \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \epsilon_3 + (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,as} - \mathbf{F}_{3,as}\mathbf{u})$$

Hier ist die 4D- Divergenz gegeben durch:

$$\begin{aligned} \nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,as} &= \left(\frac{D_{II}\mathbf{F}_{3,as}}{Ds} - \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^d \right) \cdot \mathcal{P}_3 - \\ & - (\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as})\mathbf{u} = \\ &= \mathbf{A}_{4,as} = \mathbf{A}_{3,as} + \mathbf{A}_{0,as}\mathbf{u} = 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Die Projektionen auf die räumliche Basis bzw. in Bezug auf \mathbf{u} sind:

$$\left(\frac{D_{II}\mathbf{F}_{3,as}}{Ds} - \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^d \right) \cdot \mathcal{P}_3 = 0 \quad (1.27)$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as} = 0 \quad (1.28)$$

Hier erkennt man bereits die Nähe zur quellenfreien ersten MAXWELL'schen Gleichung, (AMPÈRE), in der Erweiterung durch H. HERTZ.

3) Zugeordneter Dualer 4D-Tensor

Dieser existiert stets als ein "normal" zu $\mathbb{T}_{4,as}$ angeordneter 4D- Tensor:

$$\mathbb{T}_{4,as}^d = \mathbf{F}_{3,as} \cdot \epsilon_3 - (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,as}^d - \mathbf{F}_{3,as}^d \mathbf{u})$$

Die 4D- Divergenz ist hier gegeben durch:

$$\begin{aligned} \nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,as}^d &= - \left(\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}^d}{Ds} + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as} \right) \cdot \mathcal{P}_3 + \\ &+ (\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d) \mathbf{u} = \quad (1.29) \\ &= \mathbf{A}_{4,as}^d = \mathbf{A}_{3,as}^d + \mathbf{A}_{0,as}^d \mathbf{u} = 0 \end{aligned}$$

Die Projektionen auf die räumliche Basis bzw. in Bezug auf \mathbf{u} sind:

$$\left(\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}^d}{Ds} + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as} \right) \cdot \mathcal{P}_3 = 0 \quad (1.30)$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d = 0 \quad (1.31)$$

Auch hier erkennt man sofort die Nähe zur zweiten MAXWELL'schen Gleichung (FARADAY).

Wegen

$$2\mathbb{T}_{4,as}^d : \mathbb{T}_{4,as} = \mathbb{T}_{4,as} : \epsilon_4 : \mathbb{T}_{4,as} = 0$$

und wegen

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,as}^d = 0 \text{ folgt}$$

$$\mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \mathbf{F}_{3,as} = 0 \quad (1.32)$$

$$(\text{und später noch } \nabla_4 \cdot \mathbf{Q}_{4,as} = 0) \quad (1.33)$$

Die Gleichungen (1.22 bis 1.28) stellen die Grundlage der MAXWELLSchen Gleichungen in der so genannten MAXWELL- Physik elektrisch leitender Kontinua bereit.

4) Der aus asymmetrischem und zugeordnetem

dualen 4D-Tensor gebildete symmetrische 4D-Tensor ist

$$\mathbb{T}_{4,s}^D = \mathbb{P}_{3,s}^D - (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,s}^D + \mathbf{F}_{3,s}^D \mathbf{u}) - E^D \mathbf{u} \mathbf{u} \quad (1.12)$$

wobei die zusammengesetzten Feldgrößen durch die Gruppe (1.13) angegeben worden sind.

Die 4D- Divergenz ist analog zu (1.18) sofort anzugeben, wobei wir nur die Projektionen (etwas verschieden angeordnet) aufschreiben:

$$\left[\left(\frac{D_{III} \mathbf{F}_{3,s}^D}{Ds} + \mathbf{F}_{3,s}^D \cdot \nabla_3 \mathbf{u} \right) - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^D + \left(E^D \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^D \right) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right] \cdot \mathcal{P}_3 = 0 \quad (1.34)$$

$$\frac{D_{III} E^D}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^D - \mathbb{P}_{3,s}^D : \nabla_3 \mathbf{u} + 2 \mathbf{F}_{3,s}^D \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} = 0 \quad (1.35)$$

Dies sind die Strukturgleichungen der späteren „Energie- Impulsgleichungen“ der MAXWELL- Physik.

Mit der Herleitung der Gleichungen (1.19, 1.20), (1.22, 1.23), (1.25, 1.26) und (1.29, 1.30) ist die mathematische Arbeit getan, d. h. die Berechnung von (1.16) in all ihren Erscheinungsformen. Die Struktur der Gleichungen (1.19, 1.20) findet Verwendung in der Hydrothermodynamik und in der phänomenologischen Strahlungshydrodynamik, diejenige der Gleichungen (1.22, 1.23) und (1.25, 1.26) in der Elektro- Magneto- Hydro-

dynamik zusammen mit Gleichungen (1.29, 1.30) für die dazugehörige Energie-Impulsphysik. Bis auf den dazu nötigen physikalischen Input ist alles Weitere im Wesentlichen Schreibearbeit.

In den vorstehenden Gleichungen sind Abkürzungen eingeführt worden, die in der Zusammenfassung unter (Z – 5.1 bis 5.4) bereits zusammengestellt worden sind.

1.33 1. Sekundärgleichungen

1. Sekundärgleichung, symmetrischer Tensor

Die vorstehenden Ergebnisse folgten aus einem 4D-Vektor $\mathbf{A}_4 = \nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4$. Da man in der 3D- Hydrodynamik aus der vektoriellen Impulsgleichung durch Divergenzbildung die sehr nützliche „Divergenzgleichung“ ableitet und außerdem durch Rotationsbildung die sehr wichtige „Wirbelgleichung“, liegt es nahe, dies auch im Vierdimensionalen zu tun. Dies ergäbe eine erhebliche Verallgemeinerung insofern, als die 4D- Tensoren, beispielsweise im Falle der NEWTON- Physik die Impuls- und Energiegleichung vereint enthalten.

Man erhält für die "4D- Divergenz" eines beliebigen 4D- Vektors $\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_0 \mathbf{u}$ zunächst allgemein

$$\nabla_4 \cdot \mathbf{A}_4 = \frac{D_{III} A_0}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3 \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \quad (1.36)$$

wobei

$$\nabla_4 \cdot \mathbf{A}_4 = \nabla_4 \cdot (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4) = \nabla_4 \nabla_4 : \mathbb{T}_4 = \dots$$

Hier wären die entsprechenden Anteile eines symmetrischen, bzw. asymmetrischen 4D- Tensors einzusetzen. Als Ergebnis erhielte man so eine Verallgemeinerung der skalaren "Divergenz- Gleichung" der Hydrodynamik.

$$\begin{aligned} \nabla_4 \cdot \mathbf{A}_4 &= \\ &= \frac{D_{III}}{Ds} \left[\frac{D_{III} E}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s} - \mathbb{P}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{u} + 2 \mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right] + \\ &+ \nabla_3 \cdot \left[\left(E \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s} \right) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} + \left(\frac{D_{III} \mathbf{F}_{3,s}}{Ds} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} \right) \right] + \\ &+ \left[\left(E \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s} \right) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} + \left(\frac{D_{III} \mathbf{F}_{3,s}}{Ds} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} \right) \right] \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} = 0 \end{aligned}$$

Diese skalare Gleichung verbindet alle Variablen, welche dem symmetrischen Anteil des Tensors zugeordnet sind, miteinander und besitzt den Charakter einer "Kontrollgleichung" für den Fall, dass Lösungen der Primärgleichung gefunden wären.

1. Sekundärgleichung, asymmetrischer Tensor

$$\nabla_4 \cdot \mathbf{A}_{4,as} = \left(\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}}{Ds} - \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^d \right) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} = 0$$

1. Sekundärgleichung, dualer des asymmetrischer Tensors

$$\nabla_4 \cdot \mathbf{A}_{4,as}^d = \left(\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}^d}{Ds} + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as} \right) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} = 0$$

1. Sekundärgleichung, zusammengesetzter Tensor (1.12)

Umschreibung der Gleichung für den zugeordneten symmetrischen Tensor wie oben angegeben.

1.34 2. Sekundärgleichung

Für einen **asymmetrischen Tensor**

$$\begin{aligned} \nabla_4 \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_4 \nabla_4 &= [(\nabla_3 \times \mathbf{A}_3) + A_0 (\nabla_3 \times \mathbf{u})] \cdot \epsilon_3 - \\ &- \mathbf{u} \left(\frac{D\mathbf{A}_3}{Ds} + \nabla_3 A_0 + A_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) + \\ &+ \left(\frac{D\mathbf{A}_3}{Ds} + \nabla_3 A_0 + A_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.37)$$

ergibt sich ebenso ganz allgemein der zugeordnete 4D-Duale (4D- "Rotation" d. h. " $\nabla_4 \times \mathbf{A}_4$ ") aus

$$\begin{aligned} (\nabla_4 \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_4 \nabla_4)^d &= \frac{1}{2} (\nabla_4 \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_4 \nabla_4) : \epsilon_4 = \\ &= \nabla_4 \times \mathbf{A}_4 = - \left(\frac{D\mathbf{A}_3}{Ds} + \nabla_3 A_0 + A_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \cdot \epsilon_3 - \\ &- \mathbf{u} [(\nabla_3 \times \mathbf{A}_3) + A_0 (\nabla_3 \times \mathbf{u})] + \\ &+ [(\nabla_3 \times \mathbf{A}_3) + A_0 (\nabla_3 \times \mathbf{u})] \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Man kann zeigen dass (zumindest im cartesischen System)

$$\nabla_4 \cdot (\nabla_4 \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_4 \nabla_4)^d = 0.$$

Hier wären ebenfalls die entsprechenden Anteile sowohl eines symmetrischen als auch eines asymmetrischen 4D-Tensors einzusetzen. Als Ergebnis erhalte man beispielsweise eine Verallgemeinerung der "Vorticity- Gleichung" der Hydrodynamik. (**noch offen**)

$$\begin{aligned} \nabla_4 \times \mathbf{A}_4 &= \\ &= - \left[\frac{D}{Ds} \left(\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}^d}{Ds} + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as} \right) \right] \cdot \epsilon_3 - \\ &- \mathbf{u} \left[\left(\nabla_3 \times \left(\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}^d}{Ds} + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as} \right) \right) \right] + \\ &+ \left[\left(\nabla_3 \times \left(\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}^d}{Ds} + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as} \right) \right) \right] \mathbf{u} = 0 \end{aligned}$$

unter Beachtung, dass stets $\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d = 0$.

Aufgespalten in Bezug auf die Koordinaten:

$$\begin{aligned} \left[\frac{D}{Ds} \left(\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}^d}{Ds} + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as} \right) \right] \cdot \epsilon_3 - \\ - \mathbf{u} \left[\left(\nabla_3 \times \left(\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}^d}{Ds} + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as} \right) \right) \right] &= 0 \\ \nabla_3 \times \left(\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}^d}{Ds} + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as} \right) &= 0 \end{aligned}$$

was sich unter Beachtung der letzten Gleichung auf

$$\frac{D}{Ds} \left(\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}^d}{Ds} + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as} \right) \cdot \epsilon_3 = 0$$

reduziert.

Abschließend bemerken wir - wie in der Relativitätstheorie - dass auch Systeme betrachtet werden, die sich aus dem symmetrischen Anteil eines 4D- Tensors \mathbb{T}_4 , d. h. aus $\mathbb{T}_{4,s}$, und aus dem Tensor $\mathbb{T}_{4,s}^D$ zusammensetzen, wobei letzterer aus dem asymmetrischen Anteil $\mathbb{T}_{4,as}$ des Tensors \mathbb{T}_4 und dessen Dualen heraus entstan-

denen war. Dies führt zu einer weiteren Reihe von Strukturgleichungen, ableitbar aus

$$\nabla_4 \cdot (\mathbb{T}_{4,s} + \mathbb{T}_{4,s}^D) = 0 \quad (1.16a)$$

Die Projektionen sind einfach hinzuschreiben

$$\begin{aligned} [(E + E^D) \mathcal{P}_3 - (\mathbb{P}_{3,s} + \mathbb{P}_{3,s}^D)] \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - \nabla_3 \cdot (\mathbb{P}_{3,s} + \mathbb{P}_{3,s}^D) + \\ + \left(\frac{D_{III}(\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}^D)}{Ds} + (\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}^D) \cdot \nabla_3 \mathbf{u} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.19a)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_{III}(E + E^D)}{Ds} + \nabla_3 \cdot (\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}^D) - \\ - (\mathbb{P}_{3,s} + \mathbb{P}_{3,s}^D) : \nabla_3 \mathbf{u} + 2 (\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}^D) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} = 0 \end{aligned} \quad (1.20a)$$

Hier handelt es sich später um die Zusammenführung der Impuls-Energie- Physik von materiellem und von elektromagnetischem Feld.

Alle bisherigen Gleichungen beschreiben nur geometrische Eigenschaften: die "Struktur" des 4D- Kontinuums. Eine Bezugnahme auf die Physik erfolgte noch nicht! Trotzdem besitzen alle Gleichungen bereits eine erhebliche Nähe zu allen grundlegenden Gleichungen der Makrophysik. Dies legt den Schluss nahe, dass die Physik in ihrer Struktur, selbst bei Vorliegen von Irreversibilität, bereits im vierdimensionalen Raum „angelegt“ ist.

2. Physik des 4D- Kontinuums

2.1 Einführung von 4D - Quellvektoren

Es sind wenige, fast triviale Schritte, um aus den vorliegenden geometrischen Strukturgleichungen „lebendige“ Physik zu machen.

Der erste Schritt besteht darin, in (1.16) eine „physikalische“ 4D- vektorielle Quellfunktion \mathbf{Q}_4 vorzugeben. Diese dient dann zusammen mit entsprechenden Definitionen für die in \mathbb{T}_4 auftretenden Variablen der **Definition eines physikalischen Systems**. Damit begibt man sich von der Geometrie zur Physik. Die allgemein zu verwendende Gleichung

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 = - \mathbf{Q}_4 \quad (2.1)$$

ist eine physikalische 4D- **Bilanzgleichung**: Der Fluss der (nach außen gerichteten) „normalen Tensoranteilen“ $\mathbb{T}_4 \cdot \mathbf{do}_4$ durch die 4D- Oberfläche O_4 eines 4D- Volumens V_4 wird durch die im Innern desselben befindlichen Quellen \mathbf{Q}_4 bestimmt.

Es ist erstaunlich, dass diese triviale Feststellung die Quelle für die mathematische Beschreibung aller physikalischen Systeme ist, die sich einem 4D- Kontinuum zuordnen lassen. Sie führt tatsächlich in der 4D- Physik der Kontinua auf die 4D- Energie- Impulsgleichung, auf die entsprechenden Gleichungen der Strahlungsphysik sowie auf diejenigen der Elektro- Magneto- Dynamik elektrisch leitender Kontinua. So gesehen stellt Gleichung (2.1) bereits die Zusammenfassung der Gleichungen der gesamten Makrophysik der Kontinua, sogar in sehr verallgemeinerter Form, unter Einschluss irreversibler Prozesse, dar!

Neben der Energie und dem Impuls sind die skalare **Entropie** sowie der **Entropieflussvektor** eines Systems den vorgenannten Größen gegenüber übergeordnete physikalische Größen. Auch sie genügen einer Bilanzgleichung für (einen symmetrischen) 4D- Tensor $\mathbb{S}_{4,s}$:

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{S}_{4,s} = -\mathcal{Q}_{4,s} \quad (2.1a)$$

wobei $\mathcal{Q}_{4,s} \neq \mathbf{Q}_4$ ist.

Diese hier getroffene Feststellung beruht darauf, dass die „Impulsleichung“ auch den „Impuls“ des Energieflussvektors enthält und dass aus ihr eine vektorielle Gleichung für den Entropieflussvektor gewonnen werden kann.

Gleichung (2.1a) wird wie Gleichung (2.1) behandelt. Die in (2.1a) auftretenden Variablen sind über entsprechende Beziehungen mit denen aus (2.1) verbunden. Mehr darüber anschließend.

Die drei Strukturgleichungen aus 1.31 schreiben sich nun für ein physikalisches System als:

$$\nabla_4 \cdot (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4) = -\nabla_4 \cdot \mathbf{Q}_4 \quad (2.2)$$

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 = -\mathbf{Q}_4 \quad (2.3)$$

$$\epsilon_4: \nabla_4 (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4) = -\epsilon_4: \nabla_4 \mathbf{Q}_4 \quad (2.4)$$

Gleichungen (2.2, 2.3, 2.4) mit den daraus folgenden Gleichungen beschreiben die durch den 4D-Quellvektor \mathbf{Q}_4 veränderte geometrische Grundstruktur des 4D-Raumes (des 4D-Kontinuums), später erkennbar in den 3D- räumlichen und "zeitlichen" Projektionen. Sie gelten für Jeden 4D- Tensor $\mathbb{T}_4, \mathbb{S}_4, \dots$

Bemerkung: Sollte die hier postulierte Existenz eines symmetrischen Entropietensors $\mathbb{S}_{4,s}$ akzeptiert werden, dann sollten für die Entropie auch 4D- Tensoren $\mathbb{S}_{4,as}$ und $\mathbb{S}_{4,as}^d$ existieren. Dies würde die Aussagen der Theorie sehr erweitern. Zunächst würde alles was in der Folge über \mathbb{T}_4 angegeben werden wird auf \mathbb{S}_4 übertragbar sein und man müsste nur die Variablen beider Systeme miteinander verkoppeln (integrierender Nenner). Dies wird Abschnitt 2.5 vorgenommen.

2.2 Raum und Eigenzeit

Der nächste Schritt in Richtung Physik erfolgt, wenn anstelle der Bogenlänge s der "Weltlinie" die **Eigenzeit** τ ("individuelle" Zeit gemessen im mitbewegten LAGRANGESchen System) durch $Ds = c D\tau$ eingeführt wird und außerdem der sog. Vierervektor $\mathbf{V} = c \mathbf{u}$. Dazu tritt ein später aus dimensionsmäßigen Gründen zu fordernder Vektor $\mathbf{F}_{3,s}^* = c \mathbf{F}_{3,s}$, $\mathbf{F}_{3,as}^* = c \mathbf{F}_{3,as}$.

Diese **Skalierung** kann zunächst mit einer **beliebigen charakteristischen Geschwindigkeit** c vorgenommen werden. Man erhielte so 4D- Vorversionen der allgemeinen Grundgleichungen der Physik der Kontinua, gültig im mitbewegten LAGRANGESchen System. Wählt man für c die enorm große **Lichtgeschwindigkeit im Vakuum** dann begibt man sich auf das Gebiet der konventionellen Relativitätstheorie in welcher wegen der Größe von c oft starke Vereinfachungen in den Gleichungen möglich sind. Die folgenden Gleichungen sind allgemeiner.

Die vier Tensoren (1.14) schreiben sich nun als:

$$\mathbb{T}_{4,s} = \mathbb{P}_{3,s} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{V} \mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbf{F}_{3,s}^* \mathbf{V}) - \frac{E}{c^2} \mathbf{V} \mathbf{V}$$

$$\mathbb{T}_{4,as} = \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \epsilon_3 + \frac{1}{c^2} (\mathbf{V} \mathbf{F}_{3,as}^* - \mathbf{F}_{3,as}^* \mathbf{V})$$

$$\mathbb{T}_{4,as}^d = \frac{1}{c} (\mathbf{F}_{3,as}^* \cdot \epsilon_3 - (\mathbf{V} \mathbf{F}_{3,as}^d - \mathbf{F}_{3,as}^d \mathbf{V}))$$

$$\mathbb{T}_{4,s}^D = \mathbb{P}_{3,s}^D - \frac{1}{c^2} (\mathbf{V} \mathbf{F}_{3,s}^{D*} + \mathbf{F}_{3,s}^{D*} \mathbf{V}) - \frac{E^D}{c^2} \mathbf{V} \mathbf{V}$$

und somit folgt für den

1) Symmetrischer 4D- Tensor

Projektion auf die räumliche Basis: (2.5)

$$\left[\frac{1}{c^2} (E \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}) \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} + \frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} \right] \cdot \mathcal{P}_3 = \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3$$

Projektion in Bezug auf \mathbf{V} :

$$\frac{D_{III} E}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^* - \mathbb{P}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{V} + 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} = -(\mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V})$$

2) Asymmetrischer 4D- Tensor

Projektion auf die räumliche Basis:

$$\left[\frac{D_{II}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}^*}{c^2} \right) - \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^d \right] \cdot \mathcal{P}_3 = -\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3 \quad (2.7)$$

Projektion in Bezug auf \mathbf{V} :

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^* = -\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{V} \quad (2.8)$$

3) Dualer des asymmetrischen 4D- Tensors

Projektion auf die räumliche Basis:

$$\left[\frac{D_{II}}{D\tau} \mathbf{F}_{3,as}^d + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^* \right] \cdot \mathcal{P}_3 = 0 \quad (2.9)$$

Projektion in Bezug auf \mathbf{V} :

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d = 0 \quad (2.10)$$

Man erkennt in den vorstehenden Gleichungen, wie gesagt, die Grundstruktur von hydrodynamischer Impuls- und Energiegleichung (Erster Hauptsatz der Hydro- Thermodynamik) sowie die grundsätzlichen Aussagen der MAXWELL- HERTZschen Gleichungen der Elektrodynamik leitender Fluide.

4) Der symmetrische 4D- Tensor, gebildet aus symmetrischem und asymmetrischem Anteil:

Projektion auf die räumliche Basis

$$\frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^{D*}}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^{D*}}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^D + \frac{1}{c^2} (E^D \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^D) \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} = \mathbf{Q}_{3,as} \times \mathbf{F}_{3,s}^d: \quad (2.11)$$

Projektion in Bezug auf \mathbf{V} :

$$\frac{D_{III} E^D}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^{D*} - \mathbb{P}_{3,s}^D : \nabla_3 \mathbf{V} + 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}^{D*}}{c^2} \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} = -\mathbf{Q}_{3,as} \cdot \mathbf{F}_{3,as} \quad (2.12)$$

mit den Abkürzungen,

$$\mathbb{P}_{3,s}^D = \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}^* \mathbf{F}_{3,as}^*}{c^2} + \mathbf{F}_{3,as}^d \mathbf{F}_{3,as}^d \right) - E^D \mathcal{P}_3 \quad \text{Gruppe (2.13)}$$

$$\mathbf{F}_{3,s}^D = \frac{\mathbf{F}_{3,as}^*}{c} \times \mathbf{F}_{3,as}^d = \frac{\mathbf{F}_{3,as}^{D*}}{c}$$

$$\mathbf{F}_{3,as}^{D*} = \mathbf{F}_{3,as}^* \times \mathbf{F}_{3,as}^d$$

$$2E^D = \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}^*}{c} \right)^2 + \left(\mathbf{F}_{3,as}^d \right)^2$$

Auch hier sind bereits die Grundstrukturen von elektrodynamischer Impuls- und Energiegleichungen (Poyntingscher Satz) zu erkennen.

2.3 Materie

In die Grundgleichungen (2.5), (2.6) für einen symmetrischen 4D- Tensor werden nun die folgenden für Materie typischen physikalischen Annahmen eingeführt:

Zunächst wird die charakteristische Geschwindigkeit \mathbf{c} im System als Lichtgeschwindigkeit im Vakuum aufgefasst womit man sich auf das Gebiet der Relativitätstheorie begibt. Die Energie setzt sich dann aus innerer Energie E^* und Ruhenergie $E_0 = \rho c^2$ gemäß $E = E_0 + E^*$, zusammen. Der 3D- Stresstensor könnte in seiner allgemeinen Form $\mathbb{P}_{3,s}$ weiter verwendet werden aber auch schon mittels des isotropen Druckes p und des 3D- Tensors $\mathbb{P}_{3,s}^*$ der Reibung, in der Form geschrieben werden:

$$\mathbb{P}_{3,s} = -p \mathcal{P}_3 + \mathbb{P}_{3,s}^* \quad (2.14)$$

Mit dem Druck p sind dann auch zusätzliche thermodynamische Variable verbunden, etwa die Temperatur T und damit eine Verbindung zur Thermodynamik geschaffen.

Setzt man dies in Gleichungen (2.5), (2.6) ein, dann folgt (nähere Erklärungen dazu anschließend):

Projektion auf die räumliche Basis: (2.15)

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \left((E_0 + E^* + p) \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^* \right) \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} + \\ + \nabla_3 p - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* + \\ + \frac{D_{III} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \right) + \mathbf{F}_{3,s}^* \cdot \nabla_3 \mathbf{V}}{c^2} \end{array} \right] \cdot \mathcal{P}_3 = \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3$$

Projektion in Bezug auf \mathbf{V} :

$$\frac{D_{III} (E_0 + E^*)}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^* + p \nabla_3 \cdot \mathbf{V} - \mathbb{P}_{3,s}^* : \nabla_3 \cdot \mathbf{V} + 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} = -\mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V} \quad (2.16)$$

wobei anstelle von (2.15) besser geschrieben wird

$$\left[\begin{array}{l} \left[\mathcal{P}_3 + \frac{1}{E_0} \left((E^* + p) \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^* \right) \right] \cdot \frac{D_{III} \mathbf{Q} \mathbf{V}}{D\tau} + \\ + \nabla_3 p - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* + \\ + \frac{D_{III} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \right) + \mathbf{F}_{3,s}^* \cdot \nabla_3 \mathbf{V}}{c^2} \end{array} \right] \cdot \mathcal{P}_3 = \\ = \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3 \quad (2.17)$$

Zusätzlich gilt axiomatisch, dass die Ruheenergie E_0 eines infinitesimalen 3D- Volumens im LAG-

RANGESchen System zeitlich invariant ist (Kontinuitätsgleichung)

$$\frac{D_{III} E_0}{D\tau} = c^2 \frac{D_{III} \rho}{D\tau} = 0 \quad (2.18)$$

Damit schreibt sich (2.16) einfach als

$$\frac{D_{III} E^*}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^* + p \nabla_3 \cdot \mathbf{V} - \mathbb{P}_{3,s}^* : \nabla_3 \cdot \mathbf{V} + 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} = -\mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V} \quad (2.19)$$

Näheres zu den vorstehenden Gleichungen: Hinsichtlich der Impulsgleichung folgte in (2.16) nach Erweiterung mit ρ und bei Verwendung der Kontinuitätsgleichung

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} = \frac{D_{III} \rho \mathbf{V}}{D\tau} \quad (2.20)$$

Weiterhin musste in der Energiegleichung berechnet werden $\mathbb{P}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{V}$ und in der Impulsgleichung $\nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}$.

Es ist mit

$$\mathbb{P}_{3,s} = -p \mathcal{P}_3 + \mathbb{P}_{3,s}^* = -p \mathbb{I}_4 - p \mathbf{u} \mathbf{u} + \mathbb{P}_{3,s}^*$$

in der Energiegleichung

$$\mathbb{P}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{V} = -p (\nabla_3 \cdot \mathbf{V}) + \mathbb{P}_{3,s}^* : \nabla_3 \mathbf{V}$$

und in der Impulsgleichung

$$\nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} = -\nabla_3 p - p \nabla_3 \cdot \mathcal{P}_3 + \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^*$$

wobei $\nabla_3 \cdot \mathcal{P}_3$ berechnet werden muss. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \nabla_4 \cdot \mathcal{P}_3 &= \nabla_3 \cdot \mathcal{P}_3 - \mathbf{u} \cdot \frac{D\mathcal{P}_3}{Ds} = \nabla_3 \cdot \mathcal{P}_3 + \frac{D\mathbf{u}}{Ds} = \\ &= \nabla_4 \cdot \mathbb{I}_4 + \nabla_4 \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} = \nabla_4 \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} = \frac{D\mathbf{u}}{Ds} + (\nabla_4 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} \end{aligned}$$

und somit durch Vergleich der rechten Seiten

$$\nabla_3 \cdot \mathcal{P}_3 = (\nabla_4 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}, \text{ d. h. dann aber } (\nabla_3 \cdot \mathcal{P}_3) \cdot \mathcal{P}_3 = 0,$$

womit folgt

$$\nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} = -\nabla_3 p + \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^*$$

Für den symmetrischen 4D- Tensor erhält man mit (2.17), (2.19), (2.18) die physikalischen Gleichungen für ein materielles Kontinuum, in welchem sich irreversible Prozesse abspielen (Reibung, Energiedichtefluss). Es ergibt sich eine verallgemeinerte EULERSche Impulsgleichung, eine zugehörige Energiegleichung (Erster Hauptsatz) sowie eine Kontinuitätsgleichung. Die Vektor-Quellfunktion $\mathbf{Q}_{4,s}$ ist dabei noch für das spezielle physikalische System zu spezifizieren. **Diese Gleichungen sind keine a priori- Gesetze, sie spiegeln lediglich Eigenschaften des Kontinuums im vierdimensionalen Raum wider.**

Wir schreiben diese wichtigen Endformeln nochmals zusammen: Aus der Darstellung eines symmetrischen 4D- Tensors für Materie, (2.21)

$$\mathbb{T}_{4,s} = -p \mathcal{P}_3 + \mathbb{P}_{3,s}^* - \left(\frac{\mathbf{V}}{c^2} \mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbf{F}_{3,s}^* \frac{\mathbf{V}}{c^2} \right) - (E^* + E_0) \frac{\mathbf{V} \mathbf{V}}{c^2}$$

folgt nach Divergenz- Bildung

Impulsgleichung

$$\left[\begin{array}{l} \left[\mathcal{P}_3 + \frac{1}{E_0} \left((E^* + p) \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^* \right) \right] \cdot \frac{D_{III} \mathbf{Q} \mathbf{V}}{D\tau} + \\ + \nabla_3 p - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* + \\ + \frac{D_{III} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \right) + \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \right) \cdot \nabla_3 \mathbf{V}}{c^2} \end{array} \right] \cdot \mathcal{P}_3 = \\ = \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3 \quad (2.17)$$

Energiegleichung (Erster Hauptsatz)

$$\frac{D_{III}E^*}{D\tau} + p \nabla_3 \cdot \mathbf{V} = -\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbb{P}_{3,s}^* : \nabla_3 \cdot \mathbf{V} - 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{E_0} \cdot \frac{D_{III}Q\mathbf{V}}{D\tau} - \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V} \quad (2.19)$$

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{D_{III}Q}{D\tau} = 0 \quad (2.20)$$

Zur Impulsgleichung (2.17) Folgendes: Der Faktor der zeitlichen Änderung des Impulses $Q\mathbf{V}$ ist wegen der Größenordnung c^{-2} im zweiten Term sicher durch \mathcal{P}_3 allein beschrieben. Druckgradient und Divergenz des Reibungstensors sind vertraute Terme. **Lediglich der Beitrag des Impulses, verursacht durch den irreversiblen Energieflussdichtevektor ist neu** (Hinweis darauf aber bei C. ECKART!) Unter irdischen Verhältnissen wird dieser Term keine Rolle spielen, möglicherweise in der Astrophysik. Zur Energiegleichung (2.19): bis auf den vorletzten Term der rechten Seite (findet sich ebenfalls bei C. ECKART), der unter irdischen Verhältnissen ebenfalls vernachlässigbar wäre, handelt es sich auch um vertraute Terme, wobei das Auftreten der Energiedissipation durch Reibung als irreversibler Prozess bemerkenswert ist.

Diese Vereinfachungen führen auf

$$\frac{D_{III}Q\mathbf{V}}{D\tau} = -\nabla_3 p + \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* + \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3 \quad (2.21), (2.22)$$

$$\frac{D_{III}E^*}{D\tau} + p(\nabla_3 \cdot \mathbf{V}) = -\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbb{P}_{3,s}^* : \nabla_3 \mathbf{V} - \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V}$$

Man erkennt die Nähe zu den nichtrelativistischen 3D-LAGRANGESchen Gleichungen für Fluide unter dem Einfluss von Reibung und Energieflussvektor.

Die alleinige Vernachlässigung des zweiten Terms in der Klammer vor der Beschleunigung in (2.17) ermöglicht es im allgemeinsten Falle die Impulsgleichung in die Energiegleichung (2.19) einzusetzen: (2.23)

$$\frac{D_{III}E^*}{D\tau} + p \nabla_3 \cdot \mathbf{V} = -\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbb{P}_{3,s}^* : \nabla_3 \cdot \mathbf{V} - 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{E_0} \cdot (-\nabla_3 p + \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* + \dots + \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3) - \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V}$$

Dies wäre im Falle großer Beschleunigungen oder großer Energieflüsse im System eine Verallgemeinerung der Energiegleichung. Infolge des Nenners E_0 im Zusatzterm dürfte dieser, wenn überhaupt, dann eher in der Astrophysik eine Rolle spielen wenn große Energieflüsse $\mathbf{F}_{3,s}^*$ und große Beschleunigungen zusammenwirken.

2.4 Gravitation (heuristisch)

Im Gegensatz zur Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) wird hier angenommen, dass der 4D- Quellvektor $\mathbf{Q}_{4,s}$ (evtl. neben anderem) den Einfluss der Gravitation enthält, hier im NEWTONschen Sinne als ein äußerer Einfluss aufgefasst. Es bleibt somit, zu beweisen, dass speziell im Falle schwacher Gravitationsfelder (Erde) die folgende Argumentation akzeptabel ist.

In der 3D- Hydrodynamik wird die Gravitation, d. h. der Term $-\rho \nabla_3 \phi$, durch Addition auf der rechten Seite der Impulsgleichung als äußere Kraft additiv eingeführt. Im Ersten Hauptsatz der Thermodynamik tritt jedoch die volumenspezifische Energie $\Phi = \rho \phi$ [J/m³] der Gravitation nicht explizit auf.

Geht man wie im 3- Dimensionalen *heuristisch* vor dann würde die Addition von Φ im Term $p\mathcal{P}_3$ bereits den konventionellen Ansatz in der Impulsgleichung liefern allerdings als $(-\nabla_3 \rho \phi) = -\nabla_3 \Phi$ im Unterschied zu NEWTON: $(-\rho \nabla_3 \phi)$.

Man wäre aber zusätzlich veranlasst, die Energie des Systems, $E^ + E_0$ ebenfalls durch die Energie Φ der Gravitation zu ergänzen!* Dies wäre zwar plausibel, doch es müsste in der ART bewiesen werden.

Man erhalte somit mit den neuen Variablen

$$\mathfrak{P} = p + \Phi, \mathfrak{E} = E^* + \Phi: \text{totale potentielle Energie (2.24) als Energie- Impulstensor der Materie im Gravitationsfeld} \quad (2.25)$$

$$\mathbb{T}_{4,s}^* = -\mathfrak{P}\mathcal{P}_3 + \mathbb{P}_{3,s}^* - \left(\frac{\mathbf{V}}{c^2} \mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbf{F}_{3,s}^* \frac{\mathbf{V}}{c^2} \right) - (\mathfrak{E} + E_0) \frac{\mathbf{V}\mathbf{V}}{c^2}$$

Zum ursprünglichen Tensor $\mathbb{T}_{4,s}$ wäre somit der Tensor

$$\mathbb{G}_{4,s} = -\Phi \left(\mathcal{P}_3 + \frac{\mathbf{V}\mathbf{V}}{c^2} \right) = -\Phi(\mathcal{P}_3 + \mathbf{u}\mathbf{u}) \quad (2.26)$$

additiv hinzugekommen um die Gravitation sowohl in den Impulssatz als auch in den Energiesatz einzuführen. Der zugehörige Energie- Impulstensor der Materie in einem Gravitationsfeld wäre dann:

$$\mathbb{T}_{4,s}^* = \mathbb{T}_{4,s} + \mathbb{G}_{4,s}$$

und als Gleichungssystem hierfür erhalte man dann anstelle der Gleichungen (2.17), (2.19) etwas umgestellt:

Impulserhaltung

$$\left[\mathcal{P}_3 + \frac{1}{E_0} \left((\mathfrak{E} + \mathfrak{P})\mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^* \right) \right] \cdot \frac{D_{III}Q\mathbf{V}}{D\tau} + \left[\frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} \right] \cdot \mathcal{P}_3 = -\nabla_3 \mathfrak{P} + \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* \quad (2.27)$$

Energieerhaltung (Erster Hauptsatz):

$$\frac{D_{III}\mathfrak{E}}{D\tau} + \mathfrak{P} \nabla_3 \cdot \mathbf{V} + 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{E_0} \cdot \frac{D_{III}Q\mathbf{V}}{D\tau} = -\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^* + (\nabla_3 \mathbf{V}) : \mathbb{P}_{3,s}^* \quad (2.28)$$

Massenerhaltung

$$\frac{D_{III}Q}{D\tau} = 0 \quad (2.29)$$

Hierbei ist die Vektorquellfunktion $\mathbf{Q}_{4,s} = \nabla_4 \cdot \mathbb{G}_{4,s}$ auf den linken Seiten der Gleichungen integriert.

Approximativ könnte man schreiben

$$\frac{D_{III}Q\mathbf{V}}{D\tau} = -\nabla_3 \mathfrak{P} + \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* \quad (2.27a)$$

$$\frac{D_{III}\mathfrak{E}}{D\tau} + \mathfrak{P} \nabla_3 \cdot \mathbf{V} = -\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^* + (\nabla_3 \mathbf{V}) : \mathbb{P}_{3,s}^* \quad (2.28a)$$

bzw. für eine verallgemeinerte Enthalpie $\mathfrak{E} + \mathfrak{P} = \mathfrak{H}$

$$\frac{D_{III}\mathfrak{H}}{D\tau} + \frac{D\mathfrak{P}}{D\tau} = -\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^* + (\nabla_3 \mathbf{V}) : \mathbb{P}_{3,s}^* \quad (2.30)$$

Im Vergleich zur konventionellen Form der Behandlung dieser Grundgleichungen der Thermo-Hydrodynamik tritt hier anstelle der inneren Energie E^* die sogenannte *totale potenzielle Energie* $E^* + \Phi$ und anstelle des Druckes p die Summe aus Druck und volumenspezifischem Geopotenzial, d. h. $p + \Phi$, auf. Dass dies in allen Gleichungen so einheitlich geschieht, lässt vermuten, dass dieser Behandlung des Problems der Grundgleichungen gesetzmäßiges zukommen könnte.

Schreibt man diese Gleichungen wieder in den ursprünglichen Variablen:

$$\left[\mathcal{P}_3 + \frac{1}{E_0} \left((E^* + p) \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^* \right) + \right] \cdot \frac{D_{III} \mathcal{Q} \mathbf{V}}{D\tau} + \left[\frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} \right] \cdot \mathcal{P}_3 = \quad (2.31)$$

$$= -\nabla_3 p + \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* - \left(\nabla_3 \Phi + \frac{2\Phi}{c^2} \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \right) \cdot [\mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3] \\ \frac{D_{III} E^*}{D\tau} + p \nabla_3 \cdot \mathbf{V} + 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} = \\ = -\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^* + (\nabla_3 \mathbf{V}) : \mathbb{P}_{3,s}^* - \left(\frac{D_{III} \Phi}{D\tau} + \Phi \nabla_3 \cdot \mathbf{V} \right) \cdot [-\mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V}] \quad (2.32)$$

dann lässt sich durch Vergleich mit (2.17), (2.19) erkennen, dass

$$\mathbf{Q}_{4,s} = - \left(\nabla_3 \Phi + \frac{2\Phi}{c^2} \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \right) - \left(\frac{D_{III} \Phi}{D\tau} + \Phi \nabla_3 \cdot \mathbf{V} \right) \frac{\mathbf{V}}{c^2}$$

(wobei zu beachten ist, dass die rechte Seite der Impulsgleichung $+\mathbf{Q}_{4,s}$ enthält, die Energiegleichung jedoch $-\mathbf{Q}_{4,s}$).

Dies muss identisch sein mit

$$\mathbf{Q}_{4,s} = \nabla_4 \cdot \mathbb{G}_{4,s}$$

wobei (2.26) in der Form

$$\mathbb{G}_{4,s} = -\Phi (\mathcal{P}_3 + \mathbf{u}\mathbf{u}) = -\Phi (\mathbb{I}_4 + 2\mathbf{u}\mathbf{u})$$

verwendet wird.

Wir beweisen dies:

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{G}_{4,s} = -(\nabla_4 \Phi) \cdot (\mathbb{I}_4 + 2\mathbf{u}\mathbf{u}) - 2\Phi \nabla_4 \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} = \\ = -\nabla_4 \Phi - 2 \frac{D\Phi}{Ds} \mathbf{u} - 2\Phi \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - 2\Phi (\nabla_4 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} = \\ = -\nabla_3 \Phi + \frac{D\Phi}{Ds} \mathbf{u} - 2 \frac{D\Phi}{Ds} \mathbf{u} - 2\Phi \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - 2\Phi (\nabla_4 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} = \\ = -\nabla_3 \Phi - 2\Phi \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - \left(\frac{D\Phi}{Ds} + \Phi (\nabla_4 \cdot \mathbf{u}) + \Phi (\nabla_4 \cdot \mathbf{u}) \right) \mathbf{u} = \\ = - \left(\nabla_3 \Phi + 2\Phi \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) - \left(\frac{D_{III} \Phi}{Ds} + \Phi (\nabla_4 \cdot \mathbf{u}) \right) \mathbf{u} =$$

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{G}_{4,s} = - \left(\nabla_3 \Phi + \frac{2\Phi}{c^2} \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \right) - \\ - \frac{1}{c^2} \left(\frac{D_{III} \Phi}{D\tau} + \Phi (\nabla_4 \cdot \mathbf{V}) \right) \mathbf{V} = \\ = - \left(\nabla_3 \Phi + \frac{2\Phi}{c^2} \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \right) - \frac{1}{c^2} \varrho \frac{D_{III} \Phi}{D\tau} \mathbf{V}$$

Der letzte Term der rechten Seite entstand unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung aus

$$\frac{D_{III} \Phi}{D\tau} + \Phi (\nabla_4 \cdot \mathbf{V}) = \varrho \frac{D_{III} \Phi}{D\tau}$$

Als Ergebnis folgt: Die 4D-Divergenz des auf Gravitation zurückgehenden Vektor- Quellterms $\mathbf{Q}_{4,s} = \nabla_4 \cdot \mathbb{G}_{4,s}^4$ ver-

schwindet nicht, und unter Verwendung des auf Gravitation zurückgehenden Tensors (2.26) erhält man den Erhaltungssatz

$$\nabla_4 \cdot (\mathbb{T}_{4,s} + \mathbb{G}_{4,s}) = 0 \quad (2.1)$$

Die approximierten Gleichungen (2.27a) und (2.28a) schreiben sich somit

$$\frac{D_{III} \mathcal{Q} \mathbf{V}}{D\tau} = -\nabla_3 p + \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* - \nabla_3 \Phi \\ \frac{D_{III} E^*}{D\tau} + p \nabla_3 \cdot \mathbf{V} = -\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbb{P}_{3,s}^* : \nabla_3 \mathbf{V} - \varrho \frac{D_{III} \Phi}{D\tau}$$

Geht man in der Energiegleichung von volumenzu massenspezifischen Variablen über, dann erhält man mit $E^* = \varrho e^*$ und mit der Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\varrho \nabla_3 \cdot \mathbf{V} = \frac{D\varrho}{D\tau} \\ \frac{D e^*}{D\tau} + p \frac{D\varrho}{D\tau} = \varrho \left(-\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbb{P}_{3,s}^* : \nabla_3 \mathbf{V} \right) - \frac{D_{III} \Phi}{D\tau} \quad (2.33)$$

d. h. eine bekannte Form des Ersten Hauptsatzes, bis auf das Auftreten einer Quelle (Senke), verursacht durch das Geopotenzial im Ersten Hauptsatz.. Neu ist lediglich der Term

$$-\frac{D_{III} \Phi}{D\tau} (\neq 0)$$

auf der rechten Seite der Energiegleichung. Dieser erklärt sich so: Bewegt sich ein infinitesimales *Materievolumen* in Richtung abnehmenden Gravitationspotenzials (im Falle der Erde zur Erdoberfläche hin) dann nimmt (*unter den einfachsten Bedingungen*) die innere Energie zu, und umgekehrt, so wie es sein sollte. Unter diesen Bedingungen ist dann nämlich die totale potentielle Energie $e^* + \phi$ eine individuelle (massenspezifische) Invariante:

$$\frac{D(e^* + \phi)}{D\tau} = 0.$$

Eine Alternativform von Gleichung (2.28b) wäre

$$\frac{D(e^* + \phi)}{D\tau} + (p + \varrho \phi) \frac{D\varrho}{D\tau} = \varrho \left(-\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbb{P}_{3,s}^* : \nabla_3 \mathbf{V} \right),$$

somit eine Gleichung für die massenspezifische totale potenzielle Energie. Das Auftreten des durch $\varrho \phi = \Phi$ additiv ergänzten Druckes p in der Energiegleichung ist unkonventionell und muss in seiner Bedeutung für die Dynamik und Gesamtenergetik des Systems näher untersucht werden. Sieht man von dieser Ergänzung im zweiten Term der linken Seite ab, dann erhält man die in der Meteorologie verwendete Energiegleichung.

Im LAGRANGESchen System ist definitiv

$$\frac{D_{III} \Phi}{D\tau} \neq 0$$

Wäre die rechte Seite Null, dann, wäre das Geopotenzial eine 3D- Invariante ähnlich der Ruheenergie (Dichte). Dies trifft in einem räumlich variablen, *wenn auch räumlich stationärem Gravitationsfeld, wovon wir ausgehen müssen*, sicher nicht zu.

Wir beweisen abschließend, dass ϕ im **ortsfesten System** ein "stationäres" Feld ist (was es sein muss).

Hierzu betrachten wir den „problematischen“ Term

$$\begin{aligned} \rho \frac{D_{III}\Phi}{D\tau} &= \frac{D_{III}\Phi}{D\tau} + \Phi(\nabla_4 \cdot \mathbf{V}) = \\ &= \nabla_4 \cdot (\mathbf{V}\Phi) + \Phi(\nabla_4 \cdot \mathbf{V}) = 2\nabla_4 \cdot (\mathbf{V}\Phi) - \frac{D\Phi}{D\tau} \end{aligned}$$

Integriert man über ein **raumfestes 3D-Volumen** und über die Eigenzeit, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_1^2 d\tau \iiint_{V_3} dV_3 \left(2\nabla_4 \cdot (\mathbf{V}\Phi) - \frac{D\Phi}{D\tau} \right) &= \\ = 2 \int_1^2 d\tau \iiint_{V_3} dV_3 \left[\nabla_3 \cdot (\mathbf{V}\Phi) - \frac{\mathbf{V}}{c^2} \cdot \frac{D\mathbf{V}\Phi}{D\tau} \right] &= \\ = 2 \int_1^2 d\tau \oint_{O_3} d\mathbf{o}_3 \cdot \mathbf{V}\Phi + \iiint_{V_3} dV_3 \int_1^2 d\tau \left(2 \frac{D\Phi}{D\tau} - \frac{D\Phi}{D\tau} \right) &= \\ = \iiint_{V_3} dV_3 \int_1^2 d\tau \frac{D\Phi}{D\tau} = \iiint_{V_3} dV_3 (\Phi_2 - \Phi_1) = 0 \quad (2.43) \end{aligned}$$

In Gleichung (2.39) war Gebrauch gemacht worden von

$$\int_1^2 d\tau \oint_{O_3} d\mathbf{o}_3 \cdot \mathbf{V}\Phi = 0$$

und von

$$-\frac{\mathbf{V}}{c^2} \cdot \frac{D\mathbf{V}\Phi}{D\tau} = -\left(\frac{\mathbf{V}}{c^2} \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \right) \Phi + \frac{D\Phi}{D\tau} = \frac{D\Phi}{D\tau}$$

Ändert sich somit im raumfesten Volumen V_3 das Potenzial nicht dann liegt mit $\Phi_2 = \Phi_1$ tatsächlich ein stationäres Gravitationsfeld vor. Bei Integration über ein im LAGRANGESchen Sinne mitbewegtes Volumen was hier aber erforderlich wäre verschwindet die rechte Seite von (2.26), (2.27) nicht und legt deshalb nahe den zeitlichen Anteil von $\nabla_4 \cdot \mathbb{G}_{4,s}$ als existent zu betrachten.

2.4 Alternativ: Gravitation, allgemein-relativistisch behandelt (abenteuerlich)

In der allgemeinen Relativitätstheorie wäre mit dem EINSTEIN-Tensor

$$\mathbb{G}_s^4 = \mathbb{R}^4 - \frac{R}{2} \mathbb{I}^4 \quad \text{d. h.} \quad G_j^i = R_j^i - \frac{R}{2} \delta_j^i$$

der kovariante 4D- Erhaltungssatz gegeben durch:

$$\nabla_4 \cdot (\mathbb{T}_{4,s} + \mathbb{G}_{4,s}) = 0 \quad (2.24)$$

Die Zielsetzung dieser Arbeit liegt in der Behandlung irdischer physikalischer Systeme. Dabei kommt hier infolge der Existenz des Gravitationsfeldes der Erde die allgemeine Relativitätstheorie ins Spiel. Es tritt durch die Gravitation der Erde (Rotation?) innerhalb des "flachen" MINKOWSKI-Raumes eine schwache Raumkrümmung auf, welche einen wichtigen Beitrag zur Dynamik irdischer physikalischer Systeme leistet. Somit muss die bisher angewandte MINKOWSKI- Metrik unter Verwendung eines (massen- bzw. volumenspezifischen) Gravitationspotenzials ϕ [m^2/s^2] bzw. $\Phi = \rho\phi$ [J/m^3] erweitert werden.

In der allgemeinen Relativitätstheorie wird die Gravitation bereits in der Metrik des Energie- Impuls-tensors berücksichtigt. Es ist dann mit

$\nabla_4 \cdot \mathbb{G}_{4,s} = 0$ auch $\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,s} = 0$. Die **EINSTEINsche Feldgleichung** für ein von elektromagnetischen Effekten freies System beschreibt dann die "Raum- Zeit" (hier deuten wir die Tatsache, dass es sich bisher um gemischt kovariant- kontravariante 4D- Tensoren handelte, vorübergehend durch Hochstellung des Index 4 an. Es ist aber $\mathbb{I}^4 = \mathbb{I}_4$):

$$\left(R_j^i - \frac{R}{2} (\delta_j^i) \right) = \mathbb{G}_s^4 = \mathbb{R}^4 - \frac{R}{2} \mathbb{I}^4 = -\kappa \mathbb{T}_s^4 \quad (E. 1)$$

mit der EINSTEINschen Gravitationskonstanten

$\kappa = 8\pi G/c^4$ und der Krümmungsinvarianten $R = \kappa T$, wobei

$$\begin{aligned} T &= \text{Spur } \mathbb{T}_s^4 = \text{Spur } \mathbb{P}_{3,s} + E = \\ &= \text{Spur } \mathbb{P}_{3,s} + E^* + E_0 \approx E_0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

In der hier verwendeten Version der Relativitätstheorie wird für \mathbb{T}_s^4 weiter die MINKOWSKI-Metrik verwendet und im Gegensatz zu den Verhältnissen in der allgemeinen Relativitätstheorie ist hier $\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_s^4 \neq 0$, und $\mathbb{Q}_{4,s} = \nabla_4 \cdot \mathbb{G}_s^4 \neq 0$.

Es ist nicht leicht, in der Literatur die Feldgleichung für die kugelförmige und rotierende Erde der Masse M , umgeben von Materie der mittleren Dichte ρ , $\rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho$. In einer Quelle (Internet) findet, man dass die SCHWARZSCHILD- Metrik verwendet werden könnte. Diese gilt jedoch streng nur im masse-freien Raum für welchen $\mathbb{T}_s^4 = 0$ und $T = 0$ außerhalb des gravitierenden Körpers gilt und zudem für nicht rotierende Körper. Gleichung (E.1) reduziert sich dann auf $\mathbb{R}^4 = 0$. Diese Lösung wird für den Außenraum jedoch als Näherung auch für die langsam rotierende Erde verwendet (Satelliten-bewegung). In Hinblick auf die Zielsetzung in dieser Arbeit kommt man hiermit allerdings nicht weiter.

Die Feldgleichung (E.1) schreiben wir in der Form ⁵

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 - \frac{R}{2} \mathbb{I}^4 &= \left(\mathbb{R}^4 - \frac{R}{2} \mathbb{G}^4 \right) + \frac{R}{2} (\mathbb{G}^4 - \mathbb{I}^4) = -\kappa \mathbb{T}_s^4 \text{ bzw.} \\ \left(\mathbb{R}^4 - \frac{R}{2} \mathbb{G}^4 \right) + \frac{R}{2} \mathbb{I}^4 &= -\kappa \mathbb{T}_s^4 \quad (E. 1a) \end{aligned}$$

wobei der 4D- Tensor \mathbb{I}^4 betragsmäßig als klein angesehen wird. Mit

$$\frac{R}{2\kappa} = \frac{\kappa T}{2\kappa} = \frac{T}{2} = \frac{\text{Spur } \mathbb{P}_{3,s} + E^* + E_0}{2} \approx \frac{E_0}{2}$$

schreiben wir

$$\frac{1}{\kappa} \left(\mathbb{R}^4 - \frac{R}{2} \mathbb{G}^4 \right) + \frac{E_0}{2} \mathbb{I}^4 = -\mathbb{T}_s^4 \quad (E. 1a)$$

⁵ Die Grenzen der symbolischen Vektorschreibweise nach GIBBS sind hier erreicht, es müsste ab hier im Einklang mit der in der Relativitätstheorie verwendeten Praxis dringend die Indexschreibweise verwendet werden. Bei Verzicht hierauf, gehen wir das Risiko ein, zumindest ungenau zu argumentieren. Eine Version in Index-schreibweise ist jedoch in Bearbeitung.

Wir nehmen an, dass es sich um **schwache Gravitationsfelder** handelt, Felder die approximativ in den NEWTONschen Spezialfall übergehen (JORDAN, 1953; SCHMUTZER, 1968; u. a.). Dabei ergibt sich, dass der MINKOWSKI- Tensor \mathbb{I}^4 in schwach gekrümmten Räumen durch Zusatzterme, welche das Gravitationspotenzial ϕ beinhalten, erweitert werden kann. In Bezug auf die lokale Metrik, dargestellt durch die kontravarianten Größen \mathcal{P}_3 und \mathbf{u} , schreiben wir (offen):

$$\mathbb{g}^4(\phi) = \left(1 - \frac{2}{c^2}\phi\right)\mathcal{P}_3 - \left(1 + \frac{2}{c^2}\phi\right)\mathbf{u}\mathbf{u} \quad (2.29)$$

und somit

$$\mathbb{h}^4 = \mathbb{g}^4(\phi) - \mathbb{I}^4 = -\frac{2}{c^2}\phi(\mathcal{P}_3 + \mathbf{u}\mathbf{u}) \quad (2.29a)$$

Dies könnte die "Störung" der MINKOWSKI- Metrik durch das Auftreten von (schwacher) Gravitation sein.

Gleichung (E.1a) schreibe sich dann:

$$\frac{1}{\kappa}\left(\mathbb{R}^4 - \frac{R}{2}\mathbb{g}^4\right) - \Phi(\mathcal{P}_3 + \mathbf{u}\mathbf{u}) = -\mathbb{T}_s^4 \quad (E.1b)$$

wobei

$$\frac{E_0}{c^2}\phi = \varrho\phi = \Phi$$

Dies würde genau dem heuristischen Ansatz aus (2.3) entsprechen, wo sich ergab: $\mathbb{G}_{4,s} = -\Phi(\mathcal{P}_3 + \mathbf{u}\mathbf{u})$ wenn in (E.1a)

$$\mathbb{R}^4 - \frac{R}{2}\mathbb{g}^4 = 0, \quad \text{auch } \nabla_4 \cdot \left(\mathbb{R}^4 - \frac{R}{2}\mathbb{g}^4\right) = 0, \quad (E.5a)$$

gesetzt würde, d.h., wenn man annähme, dass es sich um einen Raum konstanter Krümmung handelt.

Somit wäre in beiden Fällen der EINSTEIN-Tensor für die Erde gegeben durch

$$\mathbb{G}_s^4 = \frac{R}{2}\mathbb{h}^4 = -\Phi(\mathcal{P}_3 + \mathbf{u}\mathbf{u}) \quad (2.32)$$

Als Feldgleichung für schwache Gravitation könnte somit angenommen werden

$$\mathbb{T}_s^4 + \mathbb{G}_{4,s} = \mathbb{T}_s^4 - \Phi(\mathcal{P}_3 + \mathbf{u}\mathbf{u}) = 0 \quad (E.1c)$$

Ausführlich geschrieben ist (E.1c):

$$\mathbb{T}_s^4 + \mathbb{G}_s^4 = -(p + \Phi)\mathcal{P}_3 + \mathbb{P}_{3,s}^* - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}) - [(\mathbb{E}^* + \Phi) + E_0]\mathbf{u}\mathbf{u} = \quad (2.33)$$

$$= -\mathfrak{P}\mathcal{P}_3 + \mathbb{P}_{3,s}^* - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}) - [(\mathbb{E} + E_0)]\mathbf{u}\mathbf{u} = 0$$

und somit erhält man das gleiche Ergebnis, welches im Kapitel (2.4) heuristisch als wahrscheinlich angesehen worden war: Es entstünde somit ein durch Gravitation ergänzter Druck p und eine durch Gravitation ergänzte innere Energie:

$$\mathfrak{P} = p + \Phi, \quad \mathbb{E} = \mathbb{E}^* + \Phi.$$

Im Unterschied zur existierenden Literatur ist hier jedoch die Vektorbasis ($\mathcal{P}_3, \mathbf{u}$) LAGRANGESch verwendet worden und somit jedem sich bewegenden 4D-Raumpunkt "angeheftet". Die Variabilität der Vektorbasis zeigt sich beispielsweise, wenn aus

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{I}_4 = 0$$

berechnet wird:

$$\nabla_4 \cdot \mathcal{P}_3 = \frac{D_{III}\mathbf{u}}{Ds} \quad \text{u. a.}$$

Für $\phi = 0$ ergibt sich die MINKOWSKI- Metrik, der Zusatzterm in (2.29), bedingt durch den Nenner c^2 , ist dagegen eine kleine Korrektur. Es wird in der Literatur vermerkt, dass es sich beim Potenzial ϕ dann um ein statisches d. h. im erdfesten System zeitunabhängiges Feld handeln muss. In einem LAGRANGESchen System ist die Metrik dann aber (individuell-) zeitabhängig.

2.5 Entropie (Version 1)

Das Verhalten der Entropie im System wird durch einen symmetrischen 4D- Tensor $\mathbb{Z}_{4,s}$ beschrieben. Dieser wird durch die skalare Entropie S , den Entropieflussdichtevektor \mathbf{S}_3^* , sowie durch einen 3D- Tensor $\mathbb{R}_{3,s}$ aufgebaut:

$$\mathbb{Z}_{4,s} = \mathbb{R}_{3,s} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V}\mathbf{S}_{3,s}^* + \mathbf{S}_{3,s}^*\mathbf{V}) - S\frac{\mathbf{V}\mathbf{V}}{c^2}$$

Die zu $\nabla_4 \cdot \mathbb{Z}_{4,s} = -\mathcal{Q}_{4,s}$ (4D- Quellvektor der Entropie: $\mathcal{Q}_{4,s} \neq \mathbf{Q}_{4,s}$ im Vergleich mit früher)

gehörenden Projektionen folgen aus den Gleichungen (2.5), (2.6) nach Umbenennung der Variablen. Die hier gültigen "Struktur- Gleichungen" sind somit:

Projektion auf die räumliche Basis:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} - \nabla_3 \cdot \mathbb{R}_{3,s} + \\ + \frac{1}{E_0} (S\mathcal{P}_3 - \mathbb{R}_{3,s}) \cdot \frac{D_{III}\mathbf{Q}\mathbf{V}}{D\tau} \end{array} \right] = \mathcal{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3 \quad (2.34)$$

Projektion in Bezug auf \mathbf{V} (2.35)

$$\frac{D_{III}S}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{S}_{3,s}^* - \mathbb{R}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{V} + \frac{2\mathbf{S}_{3,s}^*}{E_0} \cdot \frac{D_{III}\mathbf{Q}\mathbf{V}}{D\tau} = -(\mathcal{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V})$$

In der Kontinuumsphysik treten derartige Gleichungen, insbesondere hinsichtlich von Aussagen über die vollständige 4D- Vektor- Quellfunktion $\mathcal{Q}_{4,s}$, offensichtlich nicht auf.

Im Folgenden bringen wir zunächst Energie-Impulsgleichungen und Entropiegleichungen miteinander in Beziehung und bestimmen dann die 4D- Vektor- Quellfunktion $\mathcal{Q}_{4,s}$.

Wir gehen von der durch Gravitation erweiterten Energie- Impulsgleichung aus: $\nabla_4 \cdot (\mathbb{T}_4 + \mathbb{G}_{4,s}) = 0$.

Hierin war

$$\begin{aligned} \nabla_4 \cdot \mathbb{G}_{4,s} &= -\left(\nabla_3 \Phi + \frac{2\Phi}{c^2} \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \right) - \varrho \frac{D_{III}\Phi}{D\tau} \frac{\mathbf{V}}{c^2} \\ &= -\left(\nabla_3 \Phi + \frac{2\Phi}{E_0} \frac{D_{III}\mathbf{Q}\mathbf{V}}{D\tau} \right) - \varrho \frac{D_{III}\Phi}{D\tau} \frac{\mathbf{V}}{c^2} \end{aligned}$$

Der Tensor $\mathbb{T}_{4,s}^* = \mathbb{T}_{4,s} + \mathbb{G}_{4,s}$ führte, mit (2.21) und (2.26) zu (2.25):

$$\mathbb{T}_{4,s} = -p\mathcal{P}_3 + \mathbb{P}_{3,s}^* - \left(\frac{\mathbf{V}}{c^2} \mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbf{F}_{3,s}^* \frac{\mathbf{V}}{c^2} \right) - (\mathbb{E}^* + E_0) \frac{\mathbf{V}\mathbf{V}}{c^2}$$

$$\mathbb{G}_{4,s} = -\Phi \left(\mathcal{P}_3 + \frac{\mathbf{V}\mathbf{V}}{c^2} \right)$$

$$\mathbb{T}_{4,s}^* = -\mathfrak{P}\mathcal{P}_3 + \mathbb{P}_{3,s}^* - \left(\frac{\mathbf{V}}{c^2} \mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbf{F}_{3,s}^* \frac{\mathbf{V}}{c^2} \right) - (\mathbb{E} + E_0) \frac{\mathbf{V}\mathbf{V}}{c^2}$$

Aus $\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,s}^* = 0$ folgten dann die Gleichungen (2.27) bis (2.29).

In der klassischen Physik (Fluide) verwendet man im vorliegenden Zusammenhang einen sog. "integ-

rierenden Nenner". Dort ist es die absolute Temperatur T , womit man die Reihe von **Materialgleichungen** des speziellen Kontinuums in das Geschehen einbindet. Hier besteht die Freiheit, für andere Materialien einen anderen angepassten integrierenden Nenner zu verwenden.

Dividiert man auch hier im Vierdimensionalen die vorstehende Gleichung durch T dann erhält man:

$$\frac{1}{T} \nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,s}^* = \nabla_4 \cdot \frac{\mathbb{T}_{4,s}^*}{T} - T \nabla_4 \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \frac{\mathbb{T}_{4,s}^*}{T} = 0$$

Hierfür schreibt man

$$\nabla_4 \cdot \frac{\mathbb{T}_{4,s}^*}{T} = T \nabla_4 \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \frac{\mathbb{T}_{4,s}^*}{T} = T \nabla_4 \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \mathbb{Z}_{4,s} = -\mathcal{Q}_{4,s} \quad (2.36)$$

wobei man schon den Tensor $\mathbb{T}_{4,s}^*/T$ mit dem 4D- Entropietensor $\mathbb{Z}_{4,s}$ identifizierte. Dieser schreibt sich unter Verwendung der durch Gravitation erweiterten Gleichungen als

$$\mathbb{Z}_{4,s} = \frac{\mathbb{T}_{4,s}^*}{T} = -\frac{\mathfrak{P}}{T} \mathcal{P}_3 + \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} - \frac{1}{c^2} \left(\mathbf{V} \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{T} + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{T} \mathbf{V} \right) - \frac{(\mathfrak{E} + E_0) \mathbf{V} \mathbf{V}}{T c^2} = \mathbb{R}_{3,s} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{V} \mathbf{S}_{3,s}^* + \mathbf{S}_{3,s}^* \mathbf{V}) - S \frac{\mathbf{V} \mathbf{V}}{c^2}$$

Somit bestünden die Zuordnungen:

$$\begin{aligned} TS &= \mathfrak{E} + E_0 \\ T\mathbf{S}_{3,s}^* &= \mathbf{F}_{3,s}^* \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$T\mathbb{R}_{3,s} = -\mathfrak{P} \mathcal{P}_3 + \mathbb{P}_{3,s}^*$$

und die 4D- Vektorquellfunktion $\mathcal{Q}_{4,s}$ wäre:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{4,s} &= -T \nabla_4 \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \mathbb{Z}_{4,s} = \frac{1}{T} \nabla_4 T \cdot \mathbb{Z}_{4,s} = \quad (2.38) \\ &= \frac{1}{T} \left(\nabla_3 T - \frac{DT \mathbf{V}}{D\tau c^2} \right) \cdot \mathbb{Z}_{4,s} = \frac{1}{T} \left(\nabla_3 T \cdot \mathbb{Z}_{4,s} - \frac{DT \mathbf{V}}{D\tau c^2} \cdot \mathbb{Z}_{4,s} \right) \\ &= \frac{1}{T} \left[\nabla_3 T \cdot \left(\mathbb{R}_{3,s} - \mathbf{S}_{3,s}^* \frac{\mathbf{V}}{c^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{DT}{D\tau} (\mathbf{S}_{3,s}^* + \mathbf{V} \mathbf{S}) \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[\nabla_3 T \cdot \mathbb{R}_{3,s} - \frac{1}{c^2} \frac{DT}{D\tau} \mathbf{S}_{3,s}^* - \left(\nabla_3 T \cdot \mathbf{S}_{3,s}^* + \frac{DT}{D\tau} S \right) \frac{\mathbf{V}}{c^2} \right] \end{aligned}$$

Da allgemein

$$\mathcal{Q}_{4,s} = \mathcal{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3 + (-\mathcal{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V}) \frac{\mathbf{V}}{c^2}$$

folgt für die rechten Seiten von (2.34) und (2.35)

$$\mathcal{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3 = \frac{1}{T} \left(-\frac{DT}{D\tau} \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} + \nabla_3 T \cdot \mathbb{R}_{3,s} \right) \quad (2.39)$$

$$-(\mathcal{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V}) = \frac{1}{T} \left(-\frac{DT}{D\tau} S - \nabla_3 T \cdot \mathbf{S}_{3,s}^* \right) \quad (2.40)$$

Setzt man die Zuordnungen (2.37) in (2.34) und (2.35) ein, dann erhält man den Satz von Entropiegleichungen für Materie im Gravitationsfeld:

Projektion auf die räumliche Basis

$$\begin{aligned} &\left[\frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} - \nabla_3 \cdot \mathbb{R}_{3,s} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{E_0} (S \mathcal{P}_3 - \mathbb{R}_{3,s}) \cdot \frac{D_{III} \mathcal{Q} \mathbf{V}}{D\tau} \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left(-\frac{DT}{D\tau} \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} + \nabla_3 T \cdot \mathbb{R}_{3,s} \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Projektion in Bezug auf \mathbf{V}

$$\begin{aligned} &\frac{D_{III} S}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{S}_{3,s}^* - \mathbb{R}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{V} + \frac{2\mathbf{S}_{3,s}^*}{E_0} \cdot \frac{D_{III} \mathcal{Q} \mathbf{V}}{D\tau} = \\ &= \frac{1}{T} \left(-\frac{DT}{D\tau} S - \nabla_3 T \cdot \mathbf{S}_{3,s}^* \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Die Bestimmung der Entropie- Vektorquellfunktion war der erste Schritt. Aussagen über die Entropieproduktion u. a. erhält man aus den Bilanzgleichungen:

Entropie- "Impuls"gleichung"

$$\begin{aligned} &\frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \right) - \nabla_3 \cdot \mathbb{R}_{3,s} = \\ &= \frac{1}{T} \left(\begin{aligned} & -T \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} + \nabla_3 T \cdot \mathbb{R}_{3,s} - \\ & - \frac{DT}{D\tau} \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} - \frac{T}{E_0} (S \mathcal{P}_3 - \mathbb{R}_{3,s}) \cdot \frac{D_{III} \mathcal{Q} \mathbf{V}}{D\tau} \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Entropiegleichung

$$\begin{aligned} &\frac{D_{III} S}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{S}_{3,s}^* = \\ &= \frac{1}{T} \left(\begin{aligned} & -\mathbf{S}_{3,s}^* \cdot \nabla_3 T + T \mathbb{R}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{V} - \\ & - \frac{DT}{D\tau} S - \frac{2T}{E_0} \mathbf{S}_{3,s}^* \cdot \frac{D_{III} \mathcal{Q} \mathbf{V}}{D\tau} \end{aligned} \right) = \rho \sigma \geq 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

wobei $T\mathbb{R}_{3,s} = -\mathfrak{P} \mathcal{P}_3 + \mathbb{P}_{3,s}^*$ eingesetzt werden muss um den aus den gegenwärtigen Betrachtungen herausfallenden Reibungstensor $\mathbb{P}_{3,s}^*$ sichtbar zu machen.

Die Entropiegleichungen (2.41) und (2.41a) für den „Impuls“ des Entropieflussvektor $\mathbf{S}_{3,s}^* = \mathbf{F}_{3,s}^*/T$ (somit für den durch Reibung verursachten Wärmeflussvektor) sind wohl bisher nicht aufgetreten. In der Vergangenheit hat beschränkte man sich im 3D auf Diskussionen um die Rolle von $-\mathcal{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V}$ in der Entropiegleichung für S . Möglicherweise ergänzen aber Festlegungen, die rechte Seite der Gleichung betreffend, die Aussagen des Zweiten Hauptsatzes welche bisher nur mit Aussagen über die rechte Seite der skalaren Entropiegleichung verbunden sind. Die rechte Seite der Gleichung (2.42) wird als Entropieproduktion interpretiert, verursacht durch irreversible Prozesse innerhalb des materiellen Systems. Die Forderung, dass diese stets ≥ 0 sein muss, ist die *Aussage des Zweiten Hauptsatzes*. Diese Forderung ist bisher das erste in Erscheinung getretene physikalische "Gesetz". Alle vorherigen Gleichungen waren lediglich Bilanzgleichungen (wie auch diese hier).

Wenn auch Gleichung (2.42) (in verallgemeinerter Form) den "Zweiten Hauptsatz" der Thermodynamik beinhaltet, muss Gleichung (2.41), bei geeigneter Interpretation beider Seiten, unbedingt mit herangezogen werden. Sie ist nämlich als eine Bilanzgleichung für den durch nichtlineare Reibungsprozesse ($\mathbb{P}_{3,s}^*$) erzeugten Energieflussvektor ($\mathbf{F}_{3,s}^*$) aufzufassen (erzeugt durch die vom Reibungstensor $\mathbb{P}_{3,s}^*$ verursachte Energiedissipation).

Die Entropiegleichungen enthalten ausschließlich Variable, welche irreversible Prozesse beschreiben. Es sind dies der Energieflußvektor $\mathbf{F}_{3,s}^*$ und der Reibungstensor $\mathbb{P}_{3,s}^*$. Mit den ≥ 0 - Bedingungen (Zweiter Hauptsatz) stellen sie, wie gesagt *die einzigen bisher aufgetretenen physikalischen Gesetze* dar. Alles Vorherige waren (geometrische) Bilanzgleichungen, die aus der einzigen Bilanzgleichung

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 = -\mathbf{Q}_4$$

heraus abgeleitet worden waren.

Die *Entropie- "Impulsgleichung"* (2.41) bzw. (2.41a), als Gleichung für den Energie-Flussdichtevektor $\mathbf{F}_{3,s}^*$ geschrieben, kann als prognostische Gleichung für diesen aufgefasst werden womit sich eine Parametrisierung desselben erübrigt. Offen bleibt nur noch die Beschreibung der nichtlinearen inneren Wechselwirkungen die durch den "Reibungstensor" $\mathbb{P}_{3,s}^*$ charakterisiert werden. Hierfür lässt sich im Rahmen der vorliegenden Betrachtungen prinzipiell keine prognostische Gleichung ableiten; eine solche müsste aus den speziellen Eigenschaften des Kontinuums folgen. Somit ist neben den Aussagen zur Entropie eine Aussage über die nichtlinearen inneren Wechselwirkungen physikalisch vorzugeben.

Sieht man von zusätzlichen Quellen ab, dann könnte man meinen, dass das System hinsichtlich der inneren Energiewechselwirkungen gewissermaßen abgeschlossen wäre. Dies ist hinsichtlich der Zahl seiner Gleichungen und der Zahl der auftretenden Variablen nicht der Fall; es müssen, bereits in Hinblick auf den eingeführten integrierenden Nenner T , Materialgleichungen, etwa $p = p(T, \varrho)$, $E^* = E^*(T, \varrho)$ hinzutreten.

Zu den bisher auftretenden Variablen

$$\varrho, p, T, E^*, S, \mathbf{V}, \mathbf{F}_{3,s}^*, \mathbb{P}_{3,s}^*, \Phi = \varrho \Phi$$

müssen zusätzlich Materialgleichungen, wie etwa

$$p = p(T, \varrho), E^* = E^*(T, \varrho)$$

und evt. andere hinzutreten, was ja auch zu erwarten war.

Die skalare, zusammen mit der vektoriellen Entropiegleichung, sind unverzichtbare Bestandteile des Gesamtsystems von Gleichungen für die Energie- Impulphysik des materiellen Systems.

Im Sinne von A. SOMMERFELD steuern die mit der Entropie verbundenen Gleichungen - in der Funktion von Managern - die "Welt" der makroskopischen Materie mit Hilfe der irreversiblen Variablen, welche auch in den Bilanzgleichungen - in der Funktion von Buchhaltern- auftreten. Es verwundert somit nicht, dass die genannten irreversiblen Variablen bereits im 4D- Kontinuum angelegt sind: Gleichung (1.9) und (1.14).

Weltsicht: Materie bewegt sich als Folge einer ursprünglichen Ursache "allgemein", d. h. unter dem Einfluss von nichtlinearen Wechselwirkungen der Bestandteile untereinander. Diese Wechselwirkungen erzeugen dabei Felder von Energiedissipation im Kontinuum. Als Folge davon entstehen Felder von Energieflussvektoren. Der 2. Hauptsatz regelt die Beziehungen zwischen ihnen. Dann steuern beide die Energie- Impulphysik.

2.5 Entropie (Version 2)

Nochmals:

Das Verhalten der Entropie im System wird durch einen symmetrischen 4D- Tensor $\mathbb{Z}_{4,s}$ beschrieben. Dieser wird durch die skalare Entropie S , den Entropieflussvektor $\mathbf{S}_{3,s}^*$ sowie durch einen 3D- Tensor $\mathbb{R}_{3,s}$ aufgebaut:

$$\mathbb{Z}_{4,s} = \mathbb{R}_{3,s} - (\mathbf{u}\mathbf{S}_{3,s}^* + \mathbf{S}_{3,s}^*\mathbf{u}) - S\mathbf{u}\mathbf{u}$$

Die zu $\nabla_4 \cdot \mathbb{Z}_{4,s} = -\mathbf{Q}_{4,s}$ gehörigen Projektionen folgen aus den Gleichungen (2.5), (2.6) nach Umbenennung der Variablen. Die hier gültigen Gleichungen sind:

Projektion auf die räumliche Basis:

$$\left[\begin{aligned} \frac{D_{III}S}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} - \nabla_3 \cdot \mathbb{R}_{3,s} + \\ + \frac{1}{c^2} (S\mathbb{P}_3 - \mathbb{R}_{3,s}) \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \end{aligned} \right] = \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathbb{P}_3 \quad (2.34)$$

Projektion in Bezug auf \mathbf{V} (2.35)

$$\frac{D_{III}S}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{S}_{3,s}^* - \mathbb{R}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{V} + \frac{2\mathbf{S}_{3,s}^*}{E_0} \cdot \frac{D_{III}\varrho\mathbf{V}}{D\tau} = -(\mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V})$$

Diese Gleichungen sind noch ganz allgemein: sie entstehen aus dem allgemeinen symmetrischen Tensor $\mathbb{Z}_{4,s}$. In ihrer Anwendung auf einen 4D- Entropietensor findet man sie so nicht in der Kontinuumsphysik, besonders nicht hinsichtlich von Aussagen über die 4D- Vektor- Quellfunktion $\mathbf{Q}_{4,s}$.

Die Energie- Impulsgleichungen und die Entropiegleichungen (2.34, 2.35) müssen nun miteinander in Beziehung gebracht werden.

In der klassischen Physik geschieht dies für die Entropie S unter Verwendung eines sog. "integrierenden Nenners". Dort ist es die absolute Temperatur T . Hier verwenden wir die durch Gravitation erweiterte Energiegleichung (2.28):

$$\begin{aligned} \frac{D_{III}\mathcal{E}}{D\tau} + \mathfrak{P} \nabla_3 \cdot \mathbf{V} = \\ = -\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbb{P}_{3,s}^* : (\nabla_3 \mathbf{V}) - 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{E_0} \cdot \frac{D_{III}\varrho\mathbf{V}}{D\tau} \end{aligned} \quad (2.28)$$

und definieren (**abweichend von Version 1.**) die Entropie durch die Gleichung

$$\frac{D_{III}S}{D\tau} = \frac{1}{T} \left(\frac{D_{III}\mathcal{E}}{D\tau} + \mathfrak{P} \nabla_3 \cdot \mathbf{V} \right) \quad (2.36)$$

Dabei wird die *Bewegung der Materie im Gravitationsfeld als ein reversibler Vorgang* angesehen. Weiterhin definieren wir einen Entropieflussdichtevektor $\mathbf{S}_{3,s}^*$ durch

$$\mathbf{S}_{3,s}^* = \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{T} \quad (2.37)$$

Nach Division von (2.28) durch T folgt

$$\begin{aligned} \frac{D_{III}S}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{T} \right) = \\ = T\nabla_3 \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{T} + \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} : (\nabla_3 \mathbf{V}) - \frac{2}{E_0} \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{T} \cdot \frac{D_{III}\varrho\mathbf{V}}{D\tau} = \rho\sigma \geq 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dies wäre die Gleichung zur Berechnung der skalaren Entropie mittels des Entropieflussdichtevektors $\mathbf{F}_{3,s}^*/T$ und der Energiedissipation.

Führt man den Vektor der Entropieflussdichte in (2.38) ein, d. h.:

$$\frac{D_{III}S}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{S}_{3,s}^* = T\nabla_3 \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \mathbf{S}_{3,s}^* + \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} : \nabla_3 \mathbf{V} -$$

$$-\frac{2\mathbf{S}_{3,s}^*}{E_0} \cdot \frac{D_{III} \mathbf{Q} \mathbf{V}}{D\tau} (= \rho\sigma \geq 0)$$

dann liefert der Vergleich von (2.38a) mit der allgemeinen Version (2.35) die Vermutung:

$$-\mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V} = T \nabla_3 \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \mathbf{S}_{3,s}^*, \quad \mathbb{R}_{3,s} = \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} \quad (2.39)$$

Der anfänglich angegebene 4D- Entropietensor sieht dann so aus:

$$\mathbb{Z}_{4,s} = \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} - \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{T} + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{T} \mathbf{u} \right) - S \mathbf{u} \mathbf{u}$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen den im Entropietensor auftretenden Variablen und denjenigen die im Energie- Impulstensor erscheinen, hergestellt.

So wie aus der Energiegleichung mittels eines integrierenden Nenners die skalare Entropiegleichung abgeleitet wurde, kann ebenso mit der Impulsgleichung verfahren werden

Impulserhaltung

$$\begin{aligned} & \left[\mathcal{P}_3 + \frac{1}{E_0} \left((\mathfrak{E} + \mathfrak{P}) \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^* \right) \right] \cdot \frac{D_{III} \mathbf{Q} \mathbf{V}}{D\tau} + \\ & + \left[\frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} \right] \cdot \mathcal{P}_3 = \\ & = -\nabla_3 \mathfrak{P} + \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* \end{aligned} \quad (2.27)$$

da in ihr ebenfalls der Energieflussvektor $\mathbf{F}_{3,s}^*$ vertreten ist. Für diesen Fall umgeschrieben folgt

$$\begin{aligned} & \frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \right) - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* = \\ & = -\frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} - \nabla_3 \mathfrak{P} - \\ & - \left[\mathcal{P}_3 + \frac{1}{E_0} \left((\mathfrak{E} + \mathfrak{P}) \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^* \right) \right] \cdot \frac{D_{III} \mathbf{Q} \mathbf{V}}{D\tau} \end{aligned}$$

Hier erzeugen wir den Entropieflussdichtevektor $\mathbf{S}_{3,s}^*$, indem wir wieder den integrierenden Nenner T verwenden. Es ist zunächst:

$$\begin{aligned} & \frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \right) - T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} - \nabla_3 \cdot \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} - T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} = \\ & = -\frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} - \nabla_3 \left(\frac{\mathfrak{P}}{T} \right) + T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathfrak{P}}{T} - \\ & - \frac{1}{T} \left[\mathcal{P}_3 + \frac{1}{E_0} \left((\mathfrak{E} + \mathfrak{P}) \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^* \right) \right] \cdot \frac{D_{III} \mathbf{Q} \mathbf{V}}{D\tau} \end{aligned}$$

bzw. in Form einer Bilanzgleichung

$$\begin{aligned} & \frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \right) - \nabla_3 \cdot \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} = \\ & = T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} + T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} - \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} - \\ & - \nabla_3 \left(\frac{\mathfrak{P}}{T} \right) + T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathfrak{P}}{T} - \\ & - \frac{1}{T} \left[\mathcal{P}_3 + \frac{1}{E_0} \left((\mathfrak{E} + \mathfrak{P}) \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^* \right) \right] \cdot \frac{D_{III} \mathbf{Q} \mathbf{V}}{D\tau} \end{aligned}$$

Dies muss mit der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} & \frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \right) - \nabla_3 \cdot \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} = - \left(\frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \right) \cdot \nabla_3 \mathbf{V} - \\ & - \frac{1}{E_0} \left(S \mathcal{P}_3 - \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} \right) \cdot \frac{D_{III} \mathbf{Q} \mathbf{V}}{D\tau} + \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3 \end{aligned}$$

verglichen werden. Dies führt zu

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3 & = T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} + T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} - \\ & - \nabla_3 \left(\frac{\mathfrak{P}}{T} \right) + T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathfrak{P}}{T} - \\ & - \frac{1}{T} \left[\mathcal{P}_3 + \frac{1}{E_0} \left((\mathfrak{E} + \mathfrak{P}) \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^* \right) - \frac{T}{E_0} \left(S \mathcal{P}_3 - \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} \right) \right] \\ & \cdot \frac{D_{III} \mathbf{Q} \mathbf{V}}{D\tau} \end{aligned} \quad (2.40)$$

wobei der letzte Term geschrieben werden kann als

$$-\frac{1}{T} \left[\mathcal{P}_3 + \frac{1}{E_0} \left((\mathfrak{E} + \mathfrak{P} - T S) \mathcal{P}_3 \right) \right] \cdot \frac{D_{III} \mathbf{Q} \mathbf{V}}{D\tau}$$

Wäre die thermodynamische Definition der Entropie durch $T S = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}$ gegeben, verbliebe für den letzten Term

$$-\frac{1}{T} \frac{D_{III} \mathbf{Q} \mathbf{V}}{D\tau}$$

und man erhielte

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3 & = T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} + T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} - \\ & - \nabla_3 \left(\frac{\mathfrak{P}}{T} \right) + T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathfrak{P}}{T} - \frac{1}{T} \cdot \frac{D_{III} \mathbf{Q} \mathbf{V}}{D\tau} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Zusammen mit

$$-\mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V} = T \nabla_3 \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \mathbf{S}_{3,s}^*$$

ergäbe sich als 4D- Quellvektor der Entropie

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{4,s} & = T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} + T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} - \nabla_3 \left(\frac{\mathfrak{P}}{T} \right) + \\ & + T \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{T} \right) \frac{\mathfrak{P}}{T} - \frac{1}{T} \cdot \frac{D_{III} \mathbf{Q} \mathbf{V}}{D\tau} - T \nabla_3 \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \mathbf{V} \end{aligned}$$

Mit dem Bisherigen ließe sich nun Gleichung

(2.34) analog zu (2.38) etwas umgeordnet schreiben

$$\begin{aligned} & \frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \right) - \nabla_3 \cdot \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} = - \left(\frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \right) \cdot \nabla_3 \mathbf{V} - \\ & - \frac{1}{E_0} \left(S \mathcal{P}_3 - \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} \right) \cdot \frac{D_{III} \mathbf{Q} \mathbf{V}}{D\tau} + \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Sieht man wieder vom vorletzten Term der rechten Seite ab, dann wäre der Vektor der Entropieflussdichte $\mathbf{S}_{3,s}^*$ allein durch die Eigenschaften des Reibungstensors in Verbindung mit dem Temperaturfeld bestimmt. Dies bedeutet, genauer gesagt, dass der Energieflussdichtevektor $\mathbf{F}_{3,s}^*$ seine Ursache in der durch den Reibungstensor $\mathbb{P}_{3,s}^*$ verursachten Energiedissipation findet und dass der Vektor der Entropiequellfunktion, $\mathbf{Q}_{4,s}$, verschieden von demjenigen ist, $\mathbf{Q}_{4,as}$, der bisher verwendet wurde und welcher neben der Gravitation noch andere physikalische Quellen enthalten könnte.

Sieht man von zusätzlichen Quellen ab, dann ist das System hinsichtlich der inneren Energiewechselwirkungen gewissermaßen abgeschlossen und man geht nicht fehl, die Vektor- Quellfunktion $\mathbf{Q}_{4,s}$ für den Entropietensor in folgender Form anzusetzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{4,s} & = T \nabla_3 \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \left(\frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} + \frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \mathbf{V} \right) = \\ & = \nabla_3 \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \left(\mathbb{P}_{3,s}^* + \mathbf{F}_{3,s}^* \frac{\mathbf{V}}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (2.40a)$$

Dann entstünde mit

$$\frac{D_{III}S}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{S}_{3,s}^* = T\nabla_3 \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \mathbf{S}_{3,s}^* + \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} : \nabla_3 \mathbf{V} - \frac{2\mathbf{S}_{3,s}^*}{E_0} \cdot \frac{D_{III}\mathbf{Q}\mathbf{V}}{D\tau} \quad (= \rho\sigma \geq 0) \quad (2.38a)$$

und

$$\frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \right) - \nabla_3 \cdot \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} = T\nabla_3 \left(\frac{1}{T} \right) \cdot \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} - \left(\frac{\mathbf{S}_{3,s}^*}{c^2} \right) \cdot \nabla_3 \mathbf{V} - \frac{1}{E_0} \left(S\mathcal{P}_3 - \frac{\mathbb{P}_{3,s}^*}{T} \right) \cdot \frac{D_{III}\mathbf{Q}\mathbf{V}}{D\tau} \quad (= \rho\sigma \geq 0) \quad (2.41a)$$

ein Gleichungssystem, das ("gesetzmäßige") Strukturähnlichkeit ausweist.

Die (impulsartigen) Entropiegleichungen (2.41) und (2.41a) sind möglicherweise bisher nicht aufgetreten. Sie sind zudem hinsichtlich des Ansatzes (2.40a) für den Quellvektor $\mathbf{Q}_{4,s}$ zwar sehr plausibel, doch nicht bewiesen. Es ist aber zu vermuten, dass diesem trotzdem eine wichtige physikalische Bedeutung zukommt. So hat es in der Vergangenheit Diskussionen um die Rolle von $-\mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{V}$ in Entropiegleichungen gegeben.

Die Gleichungen, (2.38), (2.41) enthalten ausschließlich Variable, welche irreversible Prozesse beschreiben. Es sind dies der Energieflußvektor $\mathbf{F}_{3,s}^*$ und der Reibungstensor $\mathbb{P}_{3,s}^*$. Mit den ≥ 0 - Bedingungen (Zweiter Hauptsatz) stellen sie *die einzigen bisher aufgetretenen physikalischen Gesetze* dar. Alles Vorherige waren (geometrische) Bilanzgleichungen, die aus der einzigen Bilanzgleichung

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 = -\mathbf{Q}_4$$

heraus abgeleitet worden waren.

2.6 Elektrodynamik der Kontinua (Vollfassung)

2.6.1 Definitionen und Quellvektorfunktion

Es handelt sich in diesem Abschnitt um die "Maxwell-Physik". Die Formeln (3.3), (3.4) mit (3.12), (3.13 a), mit (3.22a) und (3.24) werden im Folgenden nochmals zusammengestellt:

1. Physikalische Grundgleichungen des 4D-Tensors

$$\nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^d - \frac{D_{II}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}^*}{c^2} \right) \cdot \mathcal{P}_3 = \mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3 \quad (3.3)$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^* = -\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{V} \quad (3.12)$$

2. Geometrische "Nebenbedingungen"

$$\nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^* + \frac{D_{II}}{D\tau} \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \mathcal{P}_3 = 0 \quad (3.4)$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d = 0 \quad \text{mit} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{F}_{3,as}^* \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d = 0 \quad (3.14)$$

3. "Kontinuitätsgleichung"

$$\nabla_4 \cdot \mathbf{Q}_{4,as} = 0 \quad (1.32)$$

4. Zugehörige "Impulsgleichung"

$$\frac{D_{III}}{Ds} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^{D*}}{c^2} \right) \cdot \mathcal{P}_3 + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^{D*}}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^D +$$

$$+ \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \cdot \left(\frac{E^D}{c^2} \mathcal{P}_3 - \frac{\mathbb{P}_{3,s}^D}{c^2} \right) = \mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbb{E}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3 \quad (4.14)$$

5. Zugehörige "Energiegleichung"

$$\frac{D_{III}E^D}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^{D*} - (\nabla_3 \mathbf{V}) : \mathbb{P}_{3,s}^D + 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}^{D*}}{c^2} \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} = -\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbb{E}_{4,as} \cdot \mathbf{V} \quad (3.15)$$

Bildet man die 3D-Divergenz der Gleichung, (3.3) dann ergibt sich mit der zugehörigen Gleichung (3.12) $(\nabla_3 \cdot D_{II}/D\tau(\dots)) = D_{III}/D\tau[\nabla_3 \cdot (\dots)]$ (FORTAK 1956)

$$\frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) = \nabla_3 \cdot (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3)$$

Integriert man dies über ein materielles Volumen, dann ergibt sich eine interessante Beziehung zwischen den beiden Komponenten des Quellvektors

$$\frac{D}{D\tau} \iiint_V dV \left(\frac{\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) = \iint_0 d\mathbf{o} \cdot (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3)$$

bzw.

$$\frac{D}{Ds} \iiint_V dV (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{u}) = \iint_0 d\mathbf{o} \cdot (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3)$$

Diese allgemeinen, und auch den Quellvektor der Elektrodynamik betreffenden Beziehungen müssen dort diskutiert werden.

Der Bezug zur Elektrodynamik der Kontinua wird hergestellt wenn man definiert

$$\mathbf{F}_{3,as}^* = \mathbf{E}_3 \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_{3,as}^d = \mathbf{B}_3, \quad (6.2)$$

wobei \mathbf{E}_3 die elektrische Feldstärke und \mathbf{B}_3 die magnetische Induktion bedeuten, und wenn man alle Gleichungen durch die magnetische Feldkonstante μ dividiert und zugleich die Beziehung $c^2 \mu \varepsilon = 1$ (6.1)

zwischen der Lichtgeschwindigkeit c (im Vakuum), der magnetischen Feldkonstanten μ und der elektrischen Feldkonstanten ε verwendet

Führt dies in die beiden ersten Gleichungssätze ein, dann folgt:

$$\nabla_3 \times \frac{\mathbf{B}_3}{\mu} - \frac{D_{II}}{D\tau} (\varepsilon \mathbf{E}_3) \cdot \mathcal{P}_3 = \frac{\mathbf{Q}_{4,as}}{\mu} \cdot \mathcal{P}_3 \quad (6.3)$$

$$\nabla_3 \cdot \varepsilon \mathbf{E}_3 = -\frac{\mathbf{Q}_{4,as}}{\mu c^2} \cdot \mathbf{V} \quad (6.4)$$

und

$$\nabla_3 \times \mathbf{E}_3 + \frac{D_{II}\mathbf{B}_3}{D\tau} \cdot \mathcal{P}_3 = 0 \quad (6.5)$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{B}_3 = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{B}_3 = 0 \quad (6.6)$$

Bis auf die Beziehung (6.1) kam es bis hierher lediglich zu einer Umbenennung von zwei Vektoren innerhalb von rein geometrischen Gleichungen des 4D-Raumes. Zu physikalischen Gleichungen kommt man auch hier, wenn dem Quellvektor $\mathbf{Q}_{4,as}$ eine physikalische Bedeutung gegeben wird: Setzt man

$$\frac{\mathbf{Q}_{4,as}}{\mu} = \left(\mathbf{J}_{3,e} + \frac{D_{II}\mathbf{P}_3}{D\tau} + \nabla_3 \times \mathbf{m}_3 \right) \cdot \mathcal{P}_3 + (\rho_e - \nabla_3 \cdot \mathbf{P}_3) \mathbf{V}$$

$$= \mathbf{J}_{3,e}^D \cdot \mathcal{P}_3 + J_e^D \mathbf{V} \quad (6.7)$$

(MAUERSBERGER, 1964 u.a.),

wobei $\mathbf{J}_{3,e}$ der elektrische Leitungsstromvektor, \mathbf{P}_3 der Vektor der elektrischen Polarisierung, \mathbf{m}_3 der Vektor der Magnetisierung und ρ_e die Raumladungsdichte sind, dann erhält man die MAXWELL-HERTZschen Gleichungen der Elektrodynamik der Kontinua im hier verwendeten Sinne und in den Variablen \mathbf{E}_3 , elektrische Feldstärke und \mathbf{B}_3 , magnetische Induktion:

$$\begin{aligned} \nabla_3 \times \frac{\mathbf{B}_3}{\mu} - \frac{D_{II}}{D\tau} (\epsilon \mathbf{E}_3) \cdot \mathcal{P}_3 = \\ = \left(\mathbf{J}_{3,e} + \frac{D_{II} \mathbf{P}_3}{D\tau} + \nabla_3 \times \mathbf{m}_3 \right) \cdot \mathcal{P}_3 = \mathbf{J}_{3,e}^D \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\nabla_3 \cdot \epsilon \mathbf{E}_3 = \rho_e - \nabla_3 \cdot \mathbf{P}_3 = J_e^D \quad (6.9)$$

und unverändert

$$\nabla_3 \times \mathbf{E}_3 + \frac{D_{II} \mathbf{B}_3}{D\tau} \cdot \mathcal{P}_3 = 0 \quad (6.5)$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{B}_3 = 0 \text{ mit } \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{B}_3 = 0 \quad (6.6)$$

(bildet man $\nabla_3 \cdot D_{II} \mathbf{B}_3 / D\tau = D_{III} \nabla_3 \cdot \mathbf{B}_3$ dann ist (6.5) mit (6.6) identisch erfüllt).

Zur konventionellen und übersichtlicheren Darstellung gelangt man durch Einführung der zusammengesetzten Vektoren \mathbf{D}_3 - Vektor der dielektrischen Verschiebung und \mathbf{H}_3 - Vektor der magnetischen Feldstärke:

$$\mathbf{D}_3 = \epsilon \mathbf{E}_3 + \mathbf{P}_3 \text{ und } \mathbf{H}_3 = \mathbf{B}_3 / \mu - \mathbf{m}_3:$$

$$\nabla_3 \times \mathbf{H}_3 - \frac{D_{II} \mathbf{D}_3}{D\tau} \cdot \mathcal{P}_3 = \mathbf{J}_{3,e} \quad (6.10)$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{D}_3 = \rho_e \quad (6.11)$$

und unverändert (6.5) und (6.6).

Die "Kontinuitätsgleichung"

$$\nabla_4 \cdot \mathbf{Q}_{4,as} = 0 \quad (1.32)$$

lässt sich mit (6.7) unter Anwendung der folgenden Formel für einen 4D-Vektor $\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_3 + A_0 \mathbf{V}$ berechnen:

$$\begin{aligned} \nabla_4 \cdot \mathbf{A}_4 &= \left(\nabla_3 - \frac{\mathbf{V} D}{c^2 D\tau} \right) \cdot (\mathbf{A}_3 + A_0 \mathbf{V}) = \\ &= \nabla_3 \cdot \mathbf{A}_3 - \frac{\mathbf{V}}{c^2} \cdot \frac{D \mathbf{A}_3}{D\tau} + \mathbf{V} \cdot \nabla_4 A_0 + A_0 \nabla_3 \cdot \mathbf{V} \\ &= \frac{D_{III} A_0}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{A}_3 + \frac{\mathbf{A}_3}{c^2} \cdot \frac{D \mathbf{V}}{D\tau} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Es folgt, noch vollständig,

$$\begin{aligned} \nabla_4 \cdot \frac{\mathbf{Q}_{4,as}}{\mu} &= \frac{D_{III} \rho_e}{D\tau} - \frac{D_{III}}{D\tau} (\nabla_3 \cdot \mathbf{P}_3) + \nabla_3 \cdot \mathbf{J}_{3,e} + \nabla_3 \cdot \frac{D_{II} \mathbf{P}_3}{D\tau} \\ &+ \frac{1}{c^2} \left(\mathbf{J}_{3,e} + \frac{D_{II} \mathbf{P}_3}{D\tau} + \nabla_3 \times \mathbf{m}_3 \right) \cdot \frac{D \mathbf{V}}{D\tau} = 0 \end{aligned}$$

Es ist nun

$$\nabla_3 \cdot \frac{D_{II} \mathbf{P}_3}{D\tau} = \frac{D_{III}}{D\tau} (\nabla_3 \cdot \mathbf{P}_3) \quad (6.13)$$

womit folgt

$$\frac{D_{III} \rho_e}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{J}_{3,e} + \frac{J_{3,e}^D}{c^2} \cdot \frac{D \mathbf{V}}{D\tau} = 0 \quad (6.14)$$

Man erhält bis auf einen "relativistischen Term" (?) den bekannten Erhaltungssatz der Ladungsdichte.

Die Energie- und Impulsgleichungen der Elektrodynamik folgen nach Umschreibung von (3.6)-(3.8):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{3,s}^D &= \frac{1}{c^2} \mathbf{F}_{3,as}^* \mathbf{F}_{3,as}^* + \mathbf{F}_{3,as}^d \mathbf{F}_{3,as}^d - E^D \mathcal{P}_3 \\ \frac{\mathbb{P}_{3,s}^D}{\mu} &= \mathbb{M}_3 = \epsilon \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_3 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3 - \frac{E}{\mu} \mathcal{P}_3 \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{3,s}^D &= \frac{1}{c} \mathbf{F}_{3,as}^* \times \mathbf{F}_{3,as}^d = \frac{\mathbf{F}_{3,s}^{D*}}{c} \\ \frac{\mathbf{F}_{3,s}^{D*}}{\mu} &= \mathbf{S}_3 = \mathbf{E}_3 \times \frac{\mathbf{B}_3}{\mu} \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} 2E^D &= \frac{1}{c^2} (\mathbf{F}_{3,as}^*)^2 + (\mathbf{F}_{3,as}^d)^2 \\ 2 \frac{E^D}{\mu} &= 2E = \epsilon (\mathbf{E}_3)^2 + \frac{1}{\mu} (\mathbf{B}_3)^2 \end{aligned} \quad (6.17)$$

Hierbei sind: \mathbb{M}_3 der MAXWELLSche Spannungstensor, \mathbf{S}_3 der POYNTINGSche Vektor (\mathbf{S}_3/c^2 ist der elektromagnetische Impuls) und E ist die elektromagnetische Energiedichte.

Setzt man alles in (3.14) und (3.15) ein, dann

folgt:

$$\begin{aligned} \frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{S}_3}{c^2} \right) \cdot \mathcal{P}_3 + \frac{\mathbf{S}_3}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} + \frac{D \mathbf{V}}{D\tau} \cdot \left(\frac{E}{c^2} \mathcal{P}_3 - \frac{\mathbb{M}_3}{c^2} \right) = \\ = \nabla_3 \cdot \mathbb{M}_3 + \frac{\mathbf{Q}_{4,as}}{\mu} \cdot \mathbb{E}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3 \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_{III} E}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{S}_3 + 2 \frac{D \mathbf{V}}{D\tau} \cdot \frac{\mathbf{S}_3}{c^2} = \\ = (\nabla_3 \mathbf{V}) : \mathbb{M}_3 - \frac{\mathbf{Q}_{4,as}}{\mu} \cdot \mathbb{E}_{4,as} \cdot \mathbf{V} \end{aligned} \quad (6.19)$$

(die Wechselwirkung zwischen Bewegungsfeld und elektrodynamischem Spannungstensor führt zu einer Zunahme der elektrischen Energie).

Es verbleibt die Berechnung von

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{Q}_{4,as}}{\mu} \cdot \mathbb{E}_{4,as} = \\ = (\mathbf{J}_{3,e}^D \cdot \mathcal{P}_3 + J_e^D \mathbf{V}) \cdot \left(\epsilon_3 \cdot \mathbf{B}_3 + \frac{\mathbf{V}}{c^2} \mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_3 \frac{\mathbf{V}}{c^2} \right) = \\ = -(\mathbf{J}_{3,e}^D \times \mathbf{B}_3 + J_e^D \mathbf{E}_3) \cdot \mathcal{P}_3 - (\mathbf{J}_{3,e}^D \cdot \mathbf{E}_3) \frac{\mathbf{V}}{c^2} = \\ = -\mathbf{K}_3^L - (\mathbf{J}_{3,e}^D \cdot \mathbf{E}_3) \frac{\mathbf{V}}{c^2} \end{aligned}$$

Hier erscheint der LORENTZsche Kraftdichtevektor \mathbf{K}_3^L in verallgemeinerter Form

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_3^L \\ = \mathbf{J}_{3,e}^D \times \mathbf{B}_3 + J_e^D \mathbf{E}_3 \end{aligned} \quad (6.20)$$

und ebenfalls die JOULEsche Wärme

$$J_{3,e}^D \cdot \mathbf{E}_3$$

Damit ergibt sich aus (6.18), (6.19) die vollständige Impuls- und Energiephysik der Elektrodynamik in Wechselwirkung mit einem Kontinuum zu

$$\begin{aligned} \frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{S}_3}{c^2} \right) \cdot \mathcal{P}_3 + \frac{\mathbf{S}_3}{c^2} \cdot \nabla_4 \mathbf{V} + \frac{D \mathbf{V}}{D\tau} \cdot \left(\frac{E}{c^2} \mathcal{P}_3 - \frac{\mathbb{M}_3}{c^2} \right) = \\ = \nabla_3 \cdot \mathbb{M}_3 - \mathbf{K}_3^L \end{aligned} \quad (6.21), (6.22)$$

$$\frac{D_{III} E}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{S}_3 + 2 \frac{D \mathbf{V}}{D\tau} \cdot \frac{\mathbf{S}_3}{c^2} = (\nabla_3 \mathbf{V}) : \mathbb{M}_3 - J_{3,e}^D \cdot \mathbf{E}_3$$

In vertretbar vereinfachter Form gilt

$$\frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{S}_3}{c^2} \right) \cdot \mathcal{P}_3 = \nabla_3 \cdot \mathbb{M}_3 - \mathbf{K}_3^L \quad (6.22a)$$

$$\frac{D_{III}E}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{S}_3 = (\nabla_3 \mathbf{V}) : \mathbb{M}_3 - \mathbf{J}_{3,e}^D \cdot \mathbf{E}_3 \quad (6.23a)$$

Die Impulsgleichung (6.22) ist eine Verallgemeinerung einer konventionellen Version, die Energiegleichung eine solche des POYNTINGschen Satzes, wobei hier von Bedeutung ist, dass neben der JOULEschen Wärme noch eine Energiedissipation durch die Wechselwirkung zwischen bewegtem Kontinuum und elektromagnetischem Feld auftritt.

2.62 Zusammengesetztes Feld aus Materie und Elektro- Magnetik

Wir kommen in diesen Zusammenhang noch einmal auf die Strukturgleichungen für ein zusammengefasstes Feld zurück, d. h. auf die Gleichungen (1.19a), (1.20a), und wenden das Ergebnis auf das sich in einem schwachen Gravitationsfeld befindende System der Gleichungen (2.27), (2.28) an. Man erhält unschwer als Ergebnis die folgenden Gleichungen in welche noch die vorher angegebenen Bedeutungen der Variablen eingesetzt werden können:

Impulserhaltung

$$\begin{aligned} & \left[\mathcal{P}_3 + \frac{1}{E_0} \left((\mathbb{E} + E^D + \mathfrak{P}) \mathcal{P}_3 - (\mathbb{P}_{3,s}^* + \mathbb{P}_{3,s}^D) \right) \right] \cdot \frac{D_{III}Q\mathbf{V}}{D\tau} \\ & + \left[\frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbf{F}_{3,s}^{D*}}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbf{F}_{3,s}^{D*}}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} \right] \cdot \mathcal{P}_3 = \\ & = -\nabla_3 \mathfrak{P} + \nabla_3 \cdot (\mathbb{P}_{3,s}^* + \mathbb{P}_{3,s}^D) + \\ & + \mathbf{Q}_{3,as} \times \mathbf{F}_{3,s}^d + (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{F}_{3,as} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Energieerhaltung (Erster Hauptsatz):

$$\begin{aligned} & \frac{D_{III}(\mathbb{E} + E^D)}{D\tau} + \mathfrak{P} \nabla_3 \cdot \mathbf{V} + 2 \frac{(\mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbf{F}_{3,s}^{D*})}{E_0} \cdot \frac{D_{III}Q\mathbf{V}}{D\tau} = \\ & = -\nabla_3 \cdot (\mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbf{F}_{3,s}^{D*}) + (\nabla_3 \mathbf{V}) : (\mathbb{P}_{3,s}^* + \mathbb{P}_{3,s}^D) - \\ & - \mathbf{Q}_{3,as} \cdot \mathbf{F}_{3,as} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Massenerhaltung

$$\frac{D_{III}Q}{D\tau} = 0 \quad (2.29)$$

Ladungserhaltung

$$\nabla_4 \cdot \mathbf{Q}_{4,as} = 0 \quad (2.30)$$

2.6. Elektrodynamik der Kontinua (Kurzfassung)

2.61 Grundgleichungen

Die Grundgleichungen sind hier durch

$$\left[\frac{D_{II}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}^*}{c^2} \right) - \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^d \right] \cdot \mathcal{P}_3 = -\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3 \quad (2.41)$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^* = -\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{V} \quad (2.42)$$

mit

$$\left[\frac{D_{II}}{D\tau} \mathbf{F}_{3,as}^d + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^* \right] \cdot \mathcal{P}_3 = 0 \quad (2.43)$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d = 0 \quad (2.44)$$

und

$$\begin{aligned} & \left[\frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^{D*}}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^{D*}}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^D + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} (E^D \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^D) \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \right] \cdot \mathcal{P}_3 = \\ & = \mathbf{Q}_{3,as} \times \mathbf{F}_{3,s}^d + (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{F}_{3,as} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D_{III}E^D}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^{D*} - \mathbb{P}_{3,s}^D : \nabla_3 \mathbf{V} + 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}^{D*}}{c^2} \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} = \\ & = -\mathbf{Q}_{3,as} \cdot \mathbf{F}_{3,as} \end{aligned} \quad (2.46)$$

gegeben, wobei Gruppe (2.47)

$$\mathbb{P}_{3,s}^D = \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}^* \mathbf{F}_{3,as}^*}{c^2} + \mathbf{F}_{3,as}^d \mathbf{F}_{3,as}^d \right) - E^D \mathcal{P}_3$$

$$\mathbf{F}_{3,s}^D = \frac{\mathbf{F}_{3,as}^*}{c} \times \mathbf{F}_{3,as}^d = \frac{\mathbf{F}_{3,as}^{D*}}{c}$$

$$\mathbf{F}_{3,as}^{D*} = \mathbf{F}_{3,as}^* \times \mathbf{F}_{3,as}^d$$

$$2E^D = \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}^*}{c} \right)^2 + (\mathbf{F}_{3,as}^d)^2$$

Bildet man die 3D- Divergenz der Gleichung (2.41) von 1., dann ergibt sich mit der zugehörigen Gleichung (2.42)

$$\frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) = \nabla_3 \cdot (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3)$$

Integriert man dies über ein materielles Volumen, dann ergibt sich eine interessante Beziehung zwischen den beiden Komponenten des Quellvektors

$$\frac{D}{D\tau} \iiint_V dV \left(\frac{\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) = \iint_0 d\mathbf{o} \cdot (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3)$$

bzw.

$$\frac{D}{Ds} \iiint_V dV (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{u}) = \iint_0 d\mathbf{o} \cdot (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3)$$

Diese, auch den Quellvektor der Elektrodynamik betreffenden Beziehungen müssen dort diskutiert werden.

Die physikalische Annahmen sind hier:

$$\text{Gruppe (2.48)}$$

$$\mathbf{F}_3^* = \mathbf{E}_3, \quad \text{Elektrische Feldstärke}$$

$$\mathbf{F}_{3,as}^d = \mathbf{B}_3, \quad \text{Magnetische Induktion}$$

$$\mathbf{F}_{3,as}^{D*} = \mathbf{E}_3 \times \mathbf{B}_3 = \mathbf{S}_3, \quad \text{POYNTING – Vektor}$$

$$(c^2 \varepsilon \mu = 1, \text{ gegebenenfalls})$$

Der Satz von Gleichungen für die Elektrodynamik elektrisch leitender Kontinua ist dann:

$$\text{MAXWELL- HERTZsche Gleichungen:} \quad \text{Gruppe (2.49)}$$

$$\frac{D_{II}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{E}_3}{c^2} \right) - \nabla_3 \times \mathbf{B}_3 = -\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3 =$$

$$= -\mathbf{J}_{3,e} + \frac{D_{II}}{D\tau} \mathbf{P}_3 + \nabla_3 \times \mathbf{m}_3,$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{E}_3 = -\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{V} = \varrho_e - \nabla_3 \cdot \mathbf{P}_3$$

$$\frac{D_{II} \mathbf{B}_3}{D\tau} + \nabla_3 \times \mathbf{E}_3 = 0$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{B}_3 = 0$$

Hierbei berechnete sich der 4D-Quellvektor zu: (2.50)

$$\frac{\mathbf{Q}_{4,as}}{\mu} = \left(\mathbf{J}_{3,e} + \frac{D_{II}}{D\tau} \mathbf{P}_3 + \nabla_3 \times \mathbf{m}_3 \right) \cdot \mathcal{P}_3 + (\varrho_e - \nabla_3 \cdot \mathbf{P}_3) \mathbf{V}$$

mit

$$\mathbf{J}_{3,e} \text{ als Konvektionsstrom}$$

$$\mathbf{P}_3 \text{ als Polarisation}$$

\mathbf{m}_3 als Magnetisierung

\mathcal{Q}_e als Ladungsdichte

Die elektromagnetische Impulsgleichung ist.

$$\left[\begin{aligned} & \frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{S}_3}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{S}_3}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^D + \\ & + \frac{1}{c^2} (E^D \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^D) \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \end{aligned} \right] \cdot \mathcal{P}_3 =$$

$$= \mathcal{Q}_{3,as} \times \mathbf{F}_{3,s}^d + (\mathcal{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{F}_{3,as} \quad (2.51)$$

und der POYNTINGscher Satz

$$\frac{D_{III} E^D}{D\tau} + \nabla_3 \cdot \mathbf{S}_3 - \mathbb{P}_{3,s}^D : \nabla_3 \mathbf{V} + 2 \frac{\mathbf{S}_3}{c^2} \cdot \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} =$$

$$= -\mathcal{Q}_{3,as} \cdot \mathbf{F}_{3,as} \quad (2.52)$$

mit

Gruppe (2.54)

$$\mathbb{P}_{3,s}^D = \left(\frac{\mathbf{E}_3 \mathbf{E}_3}{c^2} + \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3 \right) - E^D \mathcal{P}_3 \quad \text{MAXWELL - Tensor}$$

$$\mathbf{F}_{3,as}^{D*} = \frac{\mathbf{E}_3}{c} \times \mathbf{B}_3 = \frac{\mathbf{S}_3}{c}$$

$$\mathbf{F}_{3,s}^D = \mathbf{S}_3 = \mathbf{E}_3 \times \mathbf{B}_3 \quad \text{POYNTING - Vektor}$$

$$2E^D = \left(\frac{\mathbf{E}_3}{c} \right)^2 + (\mathbf{B}_3)^2 \quad \text{Energiedichte}$$

Damit sind auch die Strukturgleichungen der Elektrodynamik leitender Kontinua als geometrische Struktur des 4D- Kontinuums erkannt.

Die zugehörigen Entropiegleichungen entstehen unter Verwendung eines integrierenden Nenners Θ mit

$$\frac{D_{III} S}{D\tau} = \frac{1}{\Theta} \frac{D_{III} E^D}{D\tau}$$

Alles, was im Falle der Materie ausgeführt wurde überträgt sich mit Hilfe der oben angegebenen Energie- Impulsgleichungen nach Umbenennung der Variablen. Insbesondere tritt zu dem elektromagnetischen 4D- Quellvektor derjenige, der aus der "inneren" Dynamik stammte:

$$\mathcal{Q}_{4,s} = \nabla_3 \left(\frac{1}{\Theta} \right) \cdot \left(\mathbb{P}_{3,s}^D + \mathbf{F}_{3,as}^{D*} \frac{\mathbf{V}}{c^2} \right)$$

Nach Kenntnis des Autors finden sich derartige Entropiebetrachtungen auf dem Gebiet der Elektrodynamik leitender Fluide in der leichter zugänglichen Literatur nicht.

2.7 Strahlungs- Hydrodynamik

Es liegt eine diesbezügliche Arbeit aus dem Jahre 2010 vor. ([Kurzfassung einarbeiten](#))

3. ANHÄNGE (Formelnummerierung chaotisch!)

3.1 Durchführung der Divergenzbildung

1) 4D- Divergenz eines symmetrischen 4D-Tensors ($\mathbb{P}_{3,s}$ ist symmetrisch)

$$\mathbb{T}_{4,s} = \mathbb{P}_{3,s} - (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s} \mathbf{u}) - \mathbf{E} \mathbf{u} \mathbf{u}$$

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{P}_{3,s} = \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} - \mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbb{P}_{3,s}}{Ds} =$$

$$= \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} + \mathbb{P}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds}$$

$$\nabla_4 \cdot \mathbf{u} \mathbf{F}_{3,s} = \mathbf{u} \cdot \nabla_4 \mathbf{F}_{3,s} + (\nabla_4 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{F}_{3,s} =$$

$$= \frac{D\mathbf{F}_{3,s}}{Ds} + (\nabla_4 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{F}_{3,s} = \frac{D_{III} \mathbf{F}_{3,s}}{Ds}$$

$$\nabla_4 \cdot \mathbf{F}_{3,s} \mathbf{u} = (\nabla_4 \cdot \mathbf{F}_{3,s}) \mathbf{u} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \nabla_4 \mathbf{u}$$

$$= \left[(\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s} - \mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{F}_{3,s}}{Ds}) \right] \mathbf{u} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \nabla_4 \mathbf{u}$$

$$= \left[(\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds}) \right] \mathbf{u} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \nabla_4 \mathbf{u}$$

$$\nabla_4 \cdot \mathbf{E} \mathbf{u} \mathbf{u} = [(\mathbf{u} \cdot \nabla_4 \mathbf{E}) + \mathbf{E}(\nabla_4 \cdot \mathbf{u})] \mathbf{u} + \mathbf{E} \mathbf{u} \cdot \nabla_4 \mathbf{u} =$$

$$= \left[\frac{D\mathbf{E}}{Ds} + \mathbf{E}(\nabla_4 \cdot \mathbf{u}) \right] \mathbf{u} + \mathbf{E} \frac{D\mathbf{u}}{Ds} = \frac{D_{III} \mathbf{E}}{Ds} \mathbf{u} + \mathbf{E} \frac{D\mathbf{u}}{Ds}$$

Es ist zwar $\nabla_4 \cdot \mathbf{u} = \nabla_3 \cdot \mathbf{u}$, doch später wurde aber $\nabla_4 \cdot \mathbf{u}$ weiter verwendet.

Die Divergenz ergibt sich, wenn man die einzelnen Terme geeignet anordnet zu

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,s} = -\mathbf{E} \frac{D\mathbf{u}}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} + \mathbb{P}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} -$$

$$- \left(\frac{D_{III} \mathbf{F}_{3,s}}{Ds} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \nabla_4 \mathbf{u} \right) - \left(\frac{D_{III} \mathbf{E}}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \mathbf{u}$$

Multipliziert man skalar mit dem 3D- Projektionstensor \mathcal{P}_3 , dann bleibt

$$(\nabla_4 \cdot \mathbb{E}_{4,s}) \cdot \mathcal{P}_3 = -\mathbf{E} \frac{D\mathbf{u}}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} + \mathbb{P}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} -$$

$$- \left(\frac{D_{III} \mathbf{F}_{3,s}}{Ds} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \nabla_4 \mathbf{u} \right)$$

Multipliziert man skalar mit \mathbf{u} , dann ist

$$(\nabla_4 \cdot \mathbb{E}_{4,s}) \cdot \mathbf{u} = \frac{D_{III} \mathbf{E}}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} +$$

$$+ \left(\nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} + \mathbb{P}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - \frac{D_{III} \mathbf{F}_{3,s}}{Ds} \right) \cdot \mathbf{u}$$

Es ist

$$(\nabla_4 \cdot \mathbb{P}_{3,s}) \cdot \mathbf{u} = \nabla_4 \cdot (\mathbb{P}_{3,s} \cdot \mathbf{u}) - (\nabla_4 \mathbf{u}) : \mathbb{P}_{3,s}$$

und mit

$$\frac{D\mathbf{F}_{3,s}}{Ds} \cdot \mathbf{u} = \frac{D(\mathbf{F}_{3,s} \cdot \mathbf{u})}{Ds} - \mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} = -\mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds}$$

erhält man

$$(\nabla_4 \cdot \mathbb{E}_{4,s}) \cdot \mathbf{u} = \frac{D_{III} \mathbf{E}}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} +$$

$$+ \left(-(\nabla_4 \mathbf{u}) : \mathbb{P}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right)$$

2) 4D- Divergenz eines asymmetrischen 4D-Tensors

($\mathbb{P}_{3,s}$ ist asymmetrisch) und seines Dualen

$$\mathbb{T}_{4,as} = \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \epsilon_3 + (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,as} - \mathbf{F}_{3,as} \mathbf{u})$$

$$\mathbb{T}_{4,as}^d = \mathbf{F}_{3,as} \cdot \epsilon_3 - (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,as}^d - \mathbf{F}_{3,as}^d \mathbf{u})$$

Hier ist beispielhaft zu berechnen

$$\nabla_4 \cdot (\epsilon_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}) \quad \text{und} \quad \nabla_4 \cdot (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,as} - \mathbf{F}_{3,as} \mathbf{u})$$

$$\nabla_4 \cdot (\epsilon_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}) = \nabla_3 \cdot \epsilon_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as} - \mathbf{u} \cdot \epsilon_3 \cdot \frac{D\mathbf{F}_{3,as}}{Ds} =$$

$$= -\nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}$$

$$\nabla_4 \cdot (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,as} - \mathbf{F}_{3,as} \mathbf{u}) =$$

$$= \frac{D_{III} \mathbf{F}_{3,as}}{Ds} - \mathbf{F}_{3,as} \cdot \nabla_4 \mathbf{u} - (\nabla_4 \cdot \mathbf{F}_{3,as}) \mathbf{u}$$

$$= \frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}}{Ds} - (\nabla_4 \cdot \mathbf{F}_{3,as}) \mathbf{u}$$

Damit erhält man

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,as} = \frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}}{Ds} - \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^d - (\nabla_4 \cdot \mathbf{F}_{3,as}) \mathbf{u}$$

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,as}^d = -\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}^d}{Ds} - \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as} + (\nabla_4 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d) \mathbf{u}$$

Die Projektionen auf die räumliche Basis sind:

$$(\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,as}) \cdot \mathcal{P}_3 = \frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}}{Ds} - \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^d$$

$$(\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,as}^d) \cdot \mathcal{P}_3 = -\left(\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}^d}{Ds} - \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as} \right)$$

Die Projektionen in Bezug auf \mathbf{u}

$$\begin{aligned} (\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,as}) \cdot \mathbf{u} &= \frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}}{Ds} \cdot \mathbf{u} + (\nabla_4 \cdot \mathbf{F}_{3,as}) = \\ &= -\mathbf{F}_{3,as} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as} - \mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{F}_{3,as}}{Ds} = \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as} \end{aligned}$$

Analog wird

$$(\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,as}^d) \cdot \mathbf{u} = -\nabla_4 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d$$

Dies beendet den mathematischen Teil der Arbeit.

3.2 Der nicht-relativistische Spezialfall

Der Übergang zu nicht-relativistischen Prozessen gestaltet sich leicht: Mit $\lambda \approx 1$ vereinfachen sich die Gleichungen immer dann, wenn $\lambda \ll 1$ auftritt (Zeit, \mathbf{V} , ...). In Termen, in denen \mathbf{V} differenziert wird kann in manchen Fällen approximativ gesetzt werden:

$$\delta \mathbf{V} = \lambda \left[\delta \mathbf{V}_3^0 + \lambda \delta \left(\frac{\mathbf{V}_3^0 \cdot \mathbf{V}_3^0}{2} \right) \frac{\mathbf{V}}{c^2} \right] \approx \delta \mathbf{V}_3^0. \quad (\text{A2.1})$$

wobei (s. Anhang 5)

$$\mathbf{V} = \lambda (\mathbf{V}_3^0 + \mathbf{V}_0^0) \text{ mit } 1/\lambda = \left[1 - \left(\frac{\mathbf{V}_3^0 \cdot \mathbf{V}_3^0}{c^2} \right) \right]^{1/2}$$

verwendet wurde und wobei $\mathbf{V}_3^0 \cdot \mathbf{V}_0^0 = 0$ beachtet wird. Multipliziert man (A2.1) von rechts skalar mit \mathbf{V} , dann ergibt sich

$$\delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \lambda^2 \left[\delta \left(\frac{\mathbf{V}_3^0 \cdot \mathbf{V}_3^0}{2} \right) - \delta \left(\frac{\mathbf{V}_3^0 \cdot \mathbf{V}_3^0}{2} \right) \right] = 0$$

was zu fordern ist.

Multipliziert man (A2.1) dagegen von rechts skalar mit \mathbf{V}_3^0 , dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_3^0 &= \lambda \left[\delta \left(\frac{\mathbf{V}_3^0 \cdot \mathbf{V}_3^0}{2} \right) + \lambda^2 \delta \left(\frac{\mathbf{V}_3^0 \cdot \mathbf{V}_3^0}{2} \right) \left(\frac{\mathbf{V}_3^0}{c} \right)^2 \right] = \\ &= \lambda \delta \left(\frac{\mathbf{V}_3^0 \cdot \mathbf{V}_3^0}{2} \right) \left[1 + \lambda^2 \left(\frac{\mathbf{V}_3^0}{c} \right)^2 \right] = \lambda^3 \delta \left(\frac{\mathbf{V}_3^0 \cdot \mathbf{V}_3^0}{2} \right) \end{aligned}$$

d. h. ein Differenzial der kinetischen Energie im Laborsystem. Insbesondere erhält man für $D\mathbf{V}/D\tau = \lambda D\mathbf{V}/Dt^0$ mit $Dt^0 = \lambda D$ (s. Anhang 5)

$$\frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \cdot \mathbf{V}_3^0 = \lambda^4 \frac{D}{Dt^0} \left(\frac{\mathbf{V}_3^0 \cdot \mathbf{V}_3^0}{2} \right)$$

die materiell-zeitliche Änderung der kinetischen Energie im Laborsystem. Hier ergeben sich die nicht-relativistischen Fälle sehr einfach.

Bis auf die Quellvektoren auf den rechten Seiten aller Gleichungen entspringen alle linken Seiten der Aussage: Im Vierdimensionalen existiert ein (4D-differenzierbarer) 4D-Tensor der einen symmetrischen und einen asymmetrischen Anteil besitzt. Damit ist die

gesamte theoretische Physik der Kontinua, auf eine geometrische Aussage reduziert. Physikalische Systeme selbst werden allein durch die Vorgabe der Quellvektoren definiert.

3.3 Allgemein-relativistische Behandlung der Gravitation (überarbeiten)

In der allgemeinen Relativitätstheorie wäre mit dem EINSTEIN-Tensor

$$\mathbb{G}_s^4 = \mathbb{R}^4 - \frac{R}{2} \mathbb{I}^4 \quad \text{d. h.} \quad G_j^i = R_j^i - \frac{R}{2} \delta_j^i$$

der kovariante 4D-Erhaltungssatz gegeben durch:

$$\nabla_4 \cdot (\mathbb{T}_{4,s} + \mathbb{G}_{4,s}) = 0 \quad (2.24)$$

Die Zielsetzung dieser Arbeit liegt in der Behandlung irdischer physikalischer Systeme. Dabei kommt hier infolge der Existenz des Gravitationsfeldes der Erde die allgemeine Relativitätstheorie ins Spiel. Es tritt durch die Gravitation der Erde (Rotation?) innerhalb des "flachen" MINKOWSKI-Raumes eine schwache Raumkrümmung auf, welche einen wichtigen Beitrag zur Dynamik irdischer physikalischer Systeme leistet. Somit muss die bisher angewandte MINKOWSKI-Metrik unter Verwendung eines (massen- bzw. volumenspezifischen) Gravitationspotenzials ϕ [m^2/s^2] bzw. $\Phi = \rho\phi$ [J/m^3] erweitert werden.

In der allgemeinen Relativitätstheorie wird die Gravitation bereits in der Metrik des Energie-Impulsensors berücksichtigt. Es ist dann mit $\nabla_4 \cdot \mathbb{G}_{4,s} = 0$ auch $\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,s} = 0$. Die EINSTEINsche Feldgleichung für ein von elektromagnetischen Effekten freies System beschreibt dann die "Raum-Zeit" (hier deuten wir die Tatsache, dass es sich bisher um gemischt kovariant-kontravariante 4D-Tensoren handelte, vorübergehend durch Hochstellung des Index 4 an. Es ist aber $\mathbb{I}^4 = \mathbb{I}_4$):

$$\left((R_j^i) - \frac{R}{2} (\delta_j^i) \right) = \mathbb{G}_s^4 = \mathbb{R}^4 - \frac{R}{2} \mathbb{I}^4 = -\kappa \mathbb{T}_s^4 \quad (\text{E. 1})$$

mit der EINSTEINschen Gravitationskonstanten $\kappa = 8\pi G/c^4$ und der Krümmungsinvarianten $R = \kappa T$, wobei $T = \text{Spur } \mathbb{T}_s^4 = \text{Spur } \mathbb{P}_{3,s} + E = \text{Spur } \mathbb{P}_{3,s} + E^* + E_0 \approx E_0$ ist.

In der hier verwendeten Version der Relativitätstheorie wird für \mathbb{T}_s^4 weiter die MINKOWSKI-Metrik verwendet und im Gegensatz zu den Verhältnissen in der allgemeinen Relativitätstheorie ist hier $\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_s^4 \neq 0$, und $\mathbf{Q}_{4,s} = \nabla_4 \cdot \mathbb{G}_s^4 \neq 0$.

Es nicht leicht, in der Literatur die Feldgleichung für die kugelförmige und rotierende Erde der Masse M , umgeben von Materie der mittleren Dichte ρ , zu finden. In einer Quelle (Internet) findet man, dass die SCHWARZSCHILD-Metrik verwendet werden könnte. Diese gilt jedoch streng nur im massefreien Raum für welchen $\mathbb{T}_s^4 = 0$ und $T = 0$ außerhalb des gravitierenden Körpers gilt, und zudem für nicht rotierende Körper. Gleichung (E.1) reduziert sich dann auf $\mathbb{R}^4 = 0$. Diese Lösung wird für den Außenraum jedoch als Nähe-

zung auch für die langsam rotierende Erde verwendet (Satellitenbewegung). In Hinblick auf die Zielsetzung in dieser Arbeit kommt man hiermit allerdings nicht weiter.

Die Feldgleichung (E.1) schreiben wir nun in der Form ⁶

$$\mathbb{R}^4 - \frac{R}{2} \mathbb{I}^4 = \left(\mathbb{R}^4 - \frac{R}{2} \mathbb{g}^4 \right) + \frac{R}{2} (\mathbb{g}^4 - \mathbb{I}^4) = -\kappa \mathbb{T}_s^4$$

$$\left(\mathbb{R}^4 - \frac{R}{2} \mathbb{g}^4 \right) + \frac{R}{2} \mathbb{h}^4 = -\kappa \mathbb{T}_s^4 \quad (\text{E.1a})$$

wobei der 4D- Tensor \mathbb{h}^4 betragsmäßig als sehr klein angesehen wird.

Ein **erster Versuch**: Wäre

$$\nabla_4 \cdot \left(\mathbb{R}^4 - \frac{R}{2} \mathbb{g}^4 \right) = 0, \quad (\text{E.3a})$$

dann könnte für sehr schwache Gravitationsfelder als Feldgleichung angenommen werden:

$$\frac{R}{2} \mathbb{h}^4 = -\kappa \mathbb{T}_s^4 \quad (\text{E.4a})$$

In der linearisierten Gravitationstheorie wird die Berechnung des "metrischen Störungsterms" \mathbb{h}^4 mit großem theoretischen Aufwand betrieben.

Wir nehmen nun an, dass es sich um **schwache Gravitationsfelder** handelt, Felder die approximativ in den einfachen NEWTONschen Spezialfall übergehen (JORDAN, 1953; SCHMUTZER, 1968; u. a.). Dabei ergibt sich, dass der MINKOWSKI- Tensor \mathbb{I}^4 in schwach gekrümmten Räumen durch Zusatzterme, welche das Gravitationspotenzial ϕ beinhalten, erweitert werden kann. In Bezug auf die lokale Metrik, dargestellt durch die kontravarianten Größen \mathcal{P}_3 und \mathbf{u} , schreiben wir (?):

$$\mathbb{g}^4(\phi) = \left(1 - \frac{2}{c^2} \phi \right) \mathcal{P}_3 - \left(1 + \frac{2}{c^2} \phi \right) \mathbf{u}\mathbf{u} \quad (\text{2.29})$$

und somit

$$\mathbb{h}^4 = \mathbb{g}^4(\phi) - \mathbb{I}^4 = -\frac{2}{c^2} \phi (\mathcal{P}_3 + \mathbf{u}\mathbf{u}) \quad (\text{2.29a})$$

Dies könnte die "Störung" der MINKOWSKI- Metrik durch das Auftreten von (schwacher) Gravitation sein.

Im Unterschied zur existierenden Literatur ist hier jedoch die Vektorbasis $(\mathcal{P}_3, \mathbf{u})$ LAGRANGESch und somit jedem sich bewegenden 4D- Raumpunkt "angeheftet". Die Variabilität der Vektorbasis zeigt sich beispielsweise, wenn aus

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{I}_4 = 0$$

berechnet wird:

$$\nabla_4 \cdot \mathcal{P}_3 = \frac{D_{III} \mathbf{u}}{D_S} \quad \text{u. a.}$$

Für $\phi = 0$ ergibt sich die MINKOWSKI- Metrik, der Zusatzterm, bedingt durch den Nenner c^2 , ist dagegen eine kleine Korrektur. Es wird in der Literatur vermerkt, dass es sich beim Potenzial ϕ dann um ein stati-

sches d. h. im erdfesten System zeitunabhängiges Feld handeln muss. In einem LAGRANGESchen System ist die Metrik dann aber (individuell-) zeitabhängig.

Ein **zweiter Versuch**: Wäre in (E.1a) bereits

$$\mathbb{R}^4 = \frac{R}{2} \mathbb{g}^4 \quad (\text{E.5a})$$

d.h., nähme man an, dass es sich um einen Raum konstanter Krümmung handelt, dann käme man ebenfalls auf Gleichung (E.4a).

In beiden Fällen ergäbe sich aus (E.4a) mit (2.29a) als Feldgleichung:

$$\kappa \mathbb{T}_s^4 + \frac{R}{2} \mathbb{h}^4 = \kappa \mathbb{T}_s^4 - \frac{R\phi}{c^2} (\mathcal{P}_3 + \mathbf{u}\mathbf{u}) = 0$$

Mit $R \approx \kappa E_0 = \kappa \rho c^2$ folgt schließlich

$$\mathbb{T}_s^4 - \Phi (\mathcal{P}_3 + \mathbf{u}\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{2.31})$$

Somit wäre der EINSTEIN- Tensor für die Erde gegeben durch

$$\mathbb{G}_s^4 = \frac{R}{2} \mathbb{h}^4 = -\kappa \Phi (\mathcal{P}_3 + \mathbf{u}\mathbf{u}) \quad (\text{2.32})$$

und man erhielte ausführlich geschrieben:

$$\mathbb{T}_s^4 + \frac{1}{\kappa} \mathbb{G}_s^4 = -(p + \Phi) \mathcal{P}_3 + \mathbb{P}_{3,s}^* - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}) - [(\mathbb{E}^* + \Phi) + E_0] \mathbf{u}\mathbf{u} =$$

$$= -\mathfrak{P} \mathcal{P}_3 + \mathbb{P}_{3,s}^* - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}) - [\mathfrak{E} + E_0] \mathbf{u}\mathbf{u} = 0 \quad (\text{2.33})$$

und somit das gleiche Ergebnis, welches im Kapitel (2.4) auf heuristischem Wege als wahrscheinlich angesehen worden war:

Es entstünde somit ein durch Gravitation ergänzter Druck p und eine durch Gravitation ergänzte innere Energie:

$$\mathfrak{P} = p + \Phi, \quad \mathfrak{E} = E^* + \Phi.$$

3.4 4D- Kinematik (ergänzen)

Hierbei handelt es sich um die 3D- Darstellungen von 4D- Ableitungen der beiden wichtigen Größen, der 4D- Identitätsdyade und dem 4D- LEVII-Civita- Symbol. Beide sind Invarianten für die gilt:

$$\nabla_4 \mathbb{I}_4 = 0, \quad \frac{D \mathbb{I}_4}{D_S} = 0, \quad \nabla_4 \epsilon_4 = 0, \quad \frac{D \epsilon_4}{D_S} = 0$$

Aus der ersten Bedingung folgt

$$\nabla_4 \mathcal{P}_3 = \nabla_4 \mathbf{u}\mathbf{u}$$

und so etwa

$$\nabla_4 \cdot \mathcal{P}_3 = \nabla_4 \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} = \frac{D \mathbf{u}}{D_S} + (\nabla_4 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} = \frac{D_{III} \mathbf{u}}{D_S}$$

$$(\nabla_4 \cdot \mathcal{P}_3) \cdot \mathcal{P}_3 = \frac{D \mathbf{u}}{D_S}$$

$$(\nabla_4 \cdot \mathcal{P}_3) \cdot \mathbf{u} = -(\nabla_4 \cdot \mathbf{u})$$

Andererseits ist

$$\nabla_4 \cdot \mathcal{P}_3 = \nabla_3 \cdot \mathcal{P}_3 - \mathbf{u} \cdot \frac{D \mathcal{P}_3}{D_S} =$$

$$= \nabla_3 \cdot \mathcal{P}_3 + \frac{D \mathbf{u}}{D_S} \cdot \mathcal{P}_3$$

Somit ist

$$\nabla_3 \cdot \mathcal{P}_3 = (\nabla_4 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} = (\nabla_3 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}$$

$$(\nabla_3 \cdot \mathcal{P}_3) \cdot \mathcal{P}_3 = 0,$$

$$(\nabla_3 \cdot \mathcal{P}_3) \cdot \mathbf{u} = -\nabla_3 \cdot \mathbf{u} \quad \text{wie vorher.}$$

Aus der zweiten Bedingung folgt

⁶ Die Grenzen der symbolischen Vektorschreibweise nach GIBBS sind hier erreicht, es müsste ab hier im Einklang mit der in der Relativitätstheorie verwendeten Praxis dringend die Indexschreibweise verwendet werden. Bei Verzicht hierauf, gehen wir das Risiko ein, zumindest ungenau zu argumentieren. Eine Version in Indexschreibweise ist jedoch in Bearbeitung.

$$\frac{D\mathbb{I}_4}{Ds} = \frac{D\mathcal{P}_3}{Ds} - \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \mathbf{u} - \mathbf{u} \frac{D\mathbf{u}}{Ds} = 0$$

$$\frac{D\mathcal{P}_3}{Ds} = \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \mathbf{u} + \mathbf{u} \frac{D\mathbf{u}}{Ds}$$

Aus der dritten Bedingung folgt etwa

$$\nabla_4 \cdot \epsilon_4 = (\nabla_4 \cdot \epsilon_4) \cdot \mathcal{P}_3 - (\nabla_4 \cdot \epsilon_4) \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} = 0$$

oder andererseits

$$\nabla_4 \cdot \epsilon_4 = \nabla_3 \cdot \epsilon_4 - \mathbf{u} \cdot \frac{D\epsilon_4}{Ds} = 0$$

3.5 4D- Vektoren und Tensoren (überarbeiten)

Ein 4D-Vektor kann im Zusammenhang mit der MINKOWSKI-Metrik geschrieben werden als

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_4 \cdot \mathbb{I}_4 = \mathbf{A}_4 \cdot \mathcal{P}_3 + (-\mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} = \mathbf{A}_3 + A_0 \mathbf{u} \quad (\text{A5.1})$$

Das Skalarprodukt zwischen zwei 4D-Vektoren ist

$$\mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{B}_4 = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{B}_3 - A_0 B_0 \quad (\text{A5.2})$$

Gilt für einen Vektor \mathbf{A}_4 dass $\mathbf{A}_3^2 > A_0^2$ dann nennt man ihn raumartig, anderenfalls zeitartig.

Die Grundform eines symmetrischen 4D-Tensors ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{4,s} &= \mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_4 \mathbf{A}_4 = \\ &= \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3 \mathbf{A}_3 + \mathbf{u} (A_0 \mathbf{B}_3 + B_0 \mathbf{A}_3) + \\ &+ (A_0 \mathbf{B}_3 + B_0 \mathbf{A}_3) \mathbf{u} + 2A_0 B_0 \mathbf{u} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{A3.3})$$

Es war, zum Vergleich:

$$\mathbb{E}_{4,s} = \mathbb{P}_{3,s} - \mathbf{u} \mathbf{F}_{3,s} - \mathbf{F}_{3,s} \mathbf{u} - \mathbf{E} \mathbf{u} \mathbf{u} \quad (\text{1.9})$$

So folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{3,s} &= \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3 \mathbf{A}_3, \\ \mathbf{F}_{3,s} &= -(\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_3 + B_0 \mathbf{A}_3), \\ \mathbf{E} &= -2A_0 B_0 \end{aligned}$$

Die Grundform eines asymmetrischen 4D-Tensors ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{4,as} &= \mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4 - \mathbf{B}_4 \mathbf{A}_4 = \\ &= \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_3 \mathbf{A}_3 + \mathbf{u} (A_0 \mathbf{B}_3 - B_0 \mathbf{A}_3) - \\ &- (A_0 \mathbf{B}_3 - B_0 \mathbf{A}_3) \mathbf{u} = \\ &= \epsilon_3 \cdot (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{B}_3) + \mathbf{u} (A_0 \mathbf{B}_3 - B_0 \mathbf{A}_3) - \\ &- (A_0 \mathbf{B}_3 - B_0 \mathbf{A}_3) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{A3.4})$$

Es war durch Vergleich:

$$\mathbb{E}_{4,as} = \epsilon_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d + (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,as}^d - \mathbf{F}_{3,as}^d \mathbf{u}) \quad (\text{1.9})$$

So folgt

$$\mathbf{F}_{3,as}^d = \mathbf{A}_3 \times \mathbf{B}_3, \quad \mathbf{F}_{3,as} = A_0 \mathbf{B}_3 - B_0 \mathbf{A}_3$$

Der duale des asymmetrischen 4D-Tensors hat Eigenschaften eines 4D-"Vektorprodukts" ($\mathbf{A}_4 \times \mathbf{B}_4$) ist jedoch ein 4D-Tensor zweiter Stufe:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{4,as}^d &= \frac{1}{2} \epsilon_4 : (\mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4 - \mathbf{B}_4 \mathbf{A}_4) = \epsilon_4 : \mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4 = \\ &= \epsilon_3 \cdot (A_0 \mathbf{B}_3 - B_0 \mathbf{A}_3) - \mathbf{u} (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{B}_3) + \\ &+ (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{B}_3) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{A3.5})$$

Es war, zum Vergleich:

$$\mathbb{E}_{4,as}^d = \epsilon_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as} - (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,as}^d - \mathbf{F}_{3,as}^d \mathbf{u}) \quad (\text{1.9})$$

mit den gleichen Beziehungen wie vorstehend.

Berechnet man mit (A.33) und (A.34) das doppelt-skalare Produkt $\mathbb{E}_4 : \mathbb{E}_{4,as}^d$ dann erhält man

$$\mathbb{E}_{4,as} : \mathbb{E}_{4,as}^d = (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{B}_3) \cdot (A_0 \mathbf{B}_3 - B_0 \mathbf{A}_3) =$$

$$= \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \mathbf{F}_{3,as} = 0!$$

Dies bestätigt die Aussage in (1.27).

Verwendet man den 4D-Nablaoperator mit $\nabla_4 = \nabla_3 + \left(-\frac{D}{Ds}\right) \mathbf{u}$

als einen der beiden 4D-Vektoren, dann erhält man (der Vektor \mathbf{u} wird mitdifferenziert, nicht jedoch das bezüglich der Differentiation konstante 4D-LEVI-CIVITA-Symbol):

$$\nabla_4 \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_4 \nabla_4 = \quad (\text{A3.6})$$

$$\begin{aligned} &= \nabla_3 \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3 \nabla_3 + B_0 (\nabla_3 \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla_3) - \\ &- \mathbf{u} \left(\frac{D\mathbf{B}_3}{Ds} - \nabla_3 B_0 + B_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) - \\ &- \left(\frac{D\mathbf{B}_3}{Ds} - \nabla_3 B_0 + B_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \mathbf{u} - 2 \frac{DB_0}{Ds} \mathbf{u} \mathbf{u} \end{aligned}$$

Verjüngt man (A3.5) und dividiert durch 2, dann ergibt sich ein früheres Ergebnis:

$$\nabla_4 \cdot \mathbf{B}_4 = \frac{D_{III} B_0}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{B}_3 + \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \cdot \mathbf{B}_3$$

Für den 4D-asymmetrische Tensor:

$$\begin{aligned} \nabla_4 \mathbf{B}_4 - \mathbf{B}_4 \nabla_4 &= \\ &= \nabla_3 \mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_3 \nabla_3 + B_0 (\nabla_3 \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla_3) - \\ &- \mathbf{u} \left(\frac{D\mathbf{B}_3}{Ds} + \nabla_3 B_0 + B_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) + \\ &+ \left(\frac{D\mathbf{B}_3}{Ds} + \nabla_3 B_0 + B_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \mathbf{u} \end{aligned}$$

kann man noch setzen

$$\begin{aligned} \nabla_3 \mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_3 \nabla_3 &= \epsilon_3 \cdot (\nabla_3 \times \mathbf{B}_3) \\ \nabla_3 \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla_3 &= \epsilon_3 \cdot (\nabla_3 \times \mathbf{u}) \end{aligned}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \nabla_4 \mathbf{B}_4 - \mathbf{B}_4 \nabla_4 &= \quad (\text{A3.7}) \\ &= \epsilon_3 \cdot (\nabla_3 \times \mathbf{B}_3) + B_0 \epsilon_3 \cdot (\nabla_3 \times \mathbf{u}) - \\ &- \mathbf{u} \left(\frac{D\mathbf{B}_3}{Ds} + \nabla_3 B_0 + B_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) + \\ &+ \left(\frac{D\mathbf{B}_3}{Ds} + \nabla_3 B_0 + B_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \mathbf{u} \end{aligned}$$

Schließlich ist für den zu (A3.6) dualen 4D-Tensor, der Eigenschaften einer "4D-Vorticity" ($\nabla_4 \times \mathbf{B}_4$) besitzt, jedoch ein 4D-Tensor zweiter Stufe ist

$$\begin{aligned} (\nabla_4 \mathbf{B}_4 - \mathbf{B}_4 \nabla_4)^d &= \frac{1}{2} \epsilon_4 : (\nabla_4 \mathbf{B}_4 - \mathbf{B}_4 \nabla_4) = \\ &= \epsilon_4 : \nabla_4 \mathbf{B}_4 = \\ &= -\epsilon_3 \cdot \left(\frac{D\mathbf{B}_3}{Ds} + \nabla_3 B_0 + B_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) - \\ &- \mathbf{u} (\nabla_3 \times \mathbf{B}_3 + B_0 \nabla_3 \times \mathbf{u}) + (\nabla_3 \times \mathbf{B}_3 + B_0 \nabla_3 \times \mathbf{u}) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{A3.8})$$

Hinsichtlich des 4D-Dualen (A5) bleibt zu zeigen, dass er typische Eigenschaften eines 4D-vektoriellen Produkts besitzt. Bildet man

$$\mathbb{E}_{4,as}^d \cdot \mathbf{A}_4 = \epsilon_4 : \mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4 \mathbf{A}_4 = 0?$$

$$\mathbb{E}_{4,as}^d \cdot \mathbf{B}_4 = \epsilon_4 : \mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_4 = 0?,$$

dann verschwinden beide Ausdrücke tatsächlich, weil ein dreifach skalares Produkt einer teilweise symmetrischen Triade mit dem asymmetrischen 4D-LEVI-CIVITA-Symbol verschwindet.

Unter Verwendung der vorstehenden Betrachtung lässt sich auch ein 4D-Spatprodukt bilden:

$$\mathbb{E}_{4,as}^d : \mathbf{C}_4 \mathbf{D}_4 = \epsilon_4 :: \mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4 \mathbf{C}_4 \mathbf{D}_4$$

womit Eigenschaften des 3D- Vektorprodukts ins Vierdimensionale übertragen sind. Da die entstehenden Ausrücke im Gegensatz zum Dreidimensionalen jedoch Tensoren geworden sind empfiehlt es sich den Gebrauch des vektoriellen Symbols \times zu vermeiden. Die konsequente Verwendung der 3D- bzw. 4D-LEVI-CIVITA-Symbole behebt alle denkbaren Schwierigkeiten.

Hinsichtlich der Divergenz eines dualen 4D-Tensors war mit vermerkt worden, dass diese verschwinden sollte. Schreibt man mit (A5)

$$\begin{aligned} \nabla_4 \cdot \mathbb{E}_{4,as}^d &= \epsilon_4 : \nabla_4 (\mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4) = 0? \\ \mathbb{E}_{4,as}^d &= \epsilon_3 \cdot (A_0 \mathbf{B}_3 - B_0 \mathbf{A}_3) - \mathbf{u} (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{B}_3) + \\ &+ (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{B}_3) \mathbf{u} = \end{aligned}$$

$$= \epsilon_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as} - (\mathbf{u} \mathbf{F}_{3,as}^d - \mathbf{F}_{3,as}^d \mathbf{u})$$

folgt analog zu 2.3

$$\begin{aligned} -\nabla_4 \cdot \mathbb{E}_{4,as}^d &= \frac{D_{III}}{Ds} (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{B}_3) + \\ &+ \nabla_3 \times (A_0 \mathbf{B}_3 - B_0 \mathbf{A}_3) - [\nabla_3 \cdot (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{B}_3)] \mathbf{u} = \\ &= \frac{D}{Ds} (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{B}_3) + (\nabla_3 \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{B}_3) + \\ &+ A_0 \nabla_3 \times \mathbf{B}_3 - B_0 \nabla_3 \times \mathbf{B}_3 + (\nabla_3 A_0) \times \mathbf{B}_3 \\ &- (\nabla_3 B_0) \times \mathbf{A}_3 - [\nabla_3 \cdot (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{B}_3)] \mathbf{u} \end{aligned}$$

Dies sollte generell verschwinden, was man so aber nicht nachweisen kann! So bleibt die als "Nebenbedingung" bezeichnete 4D-Divergenz-freiheit des Dualen eines asymmetrischen 4D- Tensors immer noch eine Hypothese.

Hinsichtlich der "4D-Vorticity" (A8)! sollte im Einklang mit Vorigem das Verschwinden der 4D- Divergenz einer "Rotation" gelten:

$$\nabla_4 \cdot (\epsilon_4 : \nabla_4 \mathbf{B}_4) = \epsilon_4 : \nabla_4 \nabla_4 \mathbf{B}_4 = 0?$$

Dies ist erfüllt, weil wie vorher ein dreifach skalares Produkt einer teilweise symmetrischen Triade mit dem asymmetrischen 4D- LEVI- CIVITA- Symbol verschwindet. Diese Tatsache lässt sich explizit auch (schwer) aus der entwickelten Form von (A8) ableiten und führt zu einem komplizierten geometrischen Zusammenhang zwischen den 3D-Vektoren und den Skalaren, welche (A8) aufbauen.

Folgende Spezialfälle sind von Interesse, zunächst für den symmetrischen 4D-Tensor

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_3 = 0: \\ \nabla_4 \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_4 \nabla_4 = \end{aligned} \quad (A6a)$$

$$\begin{aligned} &= B_0 (\nabla_3 \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla_3) + \mathbf{u} \left(\nabla_3 B_0 - B_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) + \\ &+ \left(\nabla_3 B_0 - B_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \mathbf{u} - 2 \frac{DB_0}{Ds} \mathbf{u} \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\text{zusätzlich } B_0 = 1 \quad (A6b)$$

$$\nabla_4 \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_4 \nabla_4 = \nabla_3 \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla_3 - \mathbf{u} \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \mathbf{u}$$

und

$$B_0 = 0:$$

$$\nabla_4 \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_4 \nabla_4 = \nabla_3 \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3 \nabla_3 - \mathbf{u} \frac{DB_3}{Ds} -$$

$$- \frac{DB_3}{Ds} \mathbf{u}$$

Analog für die beiden anderen Tensoren

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_3 = 0: \\ \nabla_4 \mathbf{B}_4 - \mathbf{B}_4 \nabla_4 = \end{aligned} \quad (A7a)$$

$$\begin{aligned} &= B_0 \epsilon_3 \cdot (\nabla_3 \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \left(\nabla_3 B_0 + B_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) + \\ &+ \left(\nabla_3 B_0 + B_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \mathbf{u} \end{aligned}$$

zusätzlich $B_0 = 1$

$$\begin{aligned} \nabla_4 \mathbf{B}_4 - \mathbf{B}_4 \nabla_4 = \\ &= \epsilon_3 \cdot (\nabla_3 \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \\ &+ \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (A7b)$$

und

$$\begin{aligned} B_0 = 0: \\ \nabla_4 \mathbf{B}_4 - \mathbf{B}_4 \nabla_4 = \end{aligned} \quad (A7c)$$

$$= \epsilon_3 \cdot (\nabla_3 \times \mathbf{B}_3) - \mathbf{u} \frac{DB_3}{Ds} + \frac{DB_3}{Ds} \mathbf{u}$$

und schließlich für den 4D-Dualen

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_3 = 0: \\ (\nabla_4 \mathbf{B}_4 - \mathbf{B}_4 \nabla_4)^d = \end{aligned} \quad (A8a)$$

$$\begin{aligned} &= \epsilon_3 \cdot \left(\nabla_3 B_0 + B_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) + \mathbf{u} (B_0 \nabla_3 \times \mathbf{u}) - \\ &- (B_0 \nabla_3 \times \mathbf{u}) \mathbf{u} \end{aligned}$$

zusätzlich $B_0 = 1$

$$\begin{aligned} (\nabla_4 \mathbf{B}_4 - \mathbf{B}_4 \nabla_4)^d = \\ &= \epsilon_3 \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} + \mathbf{u} (\nabla_3 \times \mathbf{u}) \\ &- (\nabla_3 \times \mathbf{u}) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (A8b)$$

und

$$\begin{aligned} B_0 = 0: \\ (\nabla_4 \mathbf{B}_4 - \mathbf{B}_4 \nabla_4)^d = \end{aligned} \quad (A8c)$$

$$= \epsilon_3 \cdot \frac{DB_3}{Ds} + \mathbf{u} (\nabla_3 \times \mathbf{B}_3) - (\nabla_3 \times \mathbf{B}_3) \mathbf{u}$$

3.6 LORENTZ- Transformation

3.61 Einleitung

Die bisher betrachteten Ausführungen lieferten Gleichungen, die ein im Kontinuum mitschwimmender Beobachter benutzen müsste. Das Kontinuum wird dabei durch LAGRANGESche Koordinaten beschrieben. Dies sind die von der Eigenzeit τ abhängigen Koordinaten a_1, a_2, a_3 im beschleunigtem und deformierten Kontinuum. Der auftretende Nabla-Operator ist im Sinne einer kovarianten Ableitung zu verstehen.

Der Physiker arbeitet jedoch in einem örtlich fixierten Labor, in einem EULERSchen System, in welchem er der Einfachheit wegen kartesische Koordinaten verwenden kann. Es verbleibt somit eine Transformation der vorher entwickelten Gleichungen vom mitschwimmenden LAGRANGESchen System in ein räumlich fest verankertes EULERSches System. Diese Transformation wird durch die LORENTZ-Transformation bereitgestellt.

Im LAGRANGESchen System besitzt jede sich gegenüber dem EULERSchen System mit der Geschwindigkeit \mathbf{V}_3^0 bewegende "Partikel" dieses mitgeführte Koordinatensystem welches als lokales Inertialsystem angesehen werden kann (MIHALAS, 1984). Dessen Vektorbasis ist durch die kovarianten Vektoren $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ gegeben. Hinzu tritt der (kovariante) Einheitsvektor \mathbf{u} in Richtung der Tangente an die Weltlinie. Das Bogenelement derselben ist mit dem Differenzial der Eigenzeit τ eines bewegten Kontinuum-Teilchens gemäß $ds = c d\tau$ verbunden. Es gilt die Orthogonalität der Basisvektoren: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) = 0$.

Es werden zwei Koordinatensysteme betrachtet: Ein EULERSches System, fixiert etwa in einem ruhenden Labor. Dagegen bewegt sich das (materielle) LAGRANGESche System. Ein (materieller) Punkt in diesem System "ruht" dort, weshalb es auch "Ruhe-system" genannt wird. Im LAGRANGESchen System kann aber auch eine Bewegung eines beliebigen Punktes, (Rakete), stattfinden welche von der Bewegung der materiellen Punkte des LAGRANGESchen Systems verschieden ist. Die LORENTZ-Transformation liefert dann die Beschreibung der Bewegung dieses Punktes (auch diejenige der Koordinaten des LAGRANGESchen Systems) so wie sie ein Beobachter im EULERSchen System sieht. Die Umkehrung wird ebenfalls durch die LORENTZ-Transformation beschrieben. Variablen im EULERSchen System werden mit hochgestellter "0" bezeichnet solche im LAGRANGESchen System erscheinen ohne Index.

3.62 Invarianz im \mathbf{R}^4

Das Differenzial eines 4D-Ortsvektors $d\mathbf{R}_4$ kann mittels des zugehörigen Differenzials des 3D-Ortsvektors $d\mathbf{R}_3$, des zeitlichen Vierervektors $\mathbf{V} = c\mathbf{u}$ sowie des Differenzials der Eigenzeit $d\tau$ (bzw. der Bogenlänge ds) dargestellt werden als:

$$d\mathbf{R}_4 = d\mathbf{R}_3 + d\tau\mathbf{V} = d\mathbf{R}_3 + ds\mathbf{u} \quad (3.6.1)$$

wobei für den Vierervektor $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = -c^2$ bzw. für seinen normierten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$ gilt.

Invarianz im \mathbf{R}^4 bedeutet:

$$d\mathbf{R}_4 = d\mathbf{R}_3 + d\tau\mathbf{V} = d\mathbf{R}_3^0 + dt^0 \mathbf{V}_0^0 = d\mathbf{R}_4^0 \quad (3.6.2)$$

$$d\mathbf{R}_4 = d\mathbf{R}_3 + ds\mathbf{u} = d\mathbf{R}_3^0 + ds^0 \mathbf{u}_0^0 = d\mathbf{R}_4^0 \quad (3.6.3)$$

Es gilt ebenfalls $\mathbf{V}_0^0 \cdot \mathbf{V}_0^0 = -c^2$, bzw. $\mathbf{u}_0^0 \cdot \mathbf{u}_0^0 = -1$ und dt^0 ist hier das Differenzial der Laborzeit t^0 . Die Vektoren \mathbf{V} und \mathbf{V}_0^0 sind die (nicht normierten) Basisvektoren der Zeitkoordinaten in den beiden Systemen. Für beide gilt die Orthogonalitätsbedingung

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{R}_3 = 0, \quad \mathbf{V}_0^0 \cdot d\mathbf{R}_3^0 = 0.$$

Weiter gilt die Invarianz des Betrages der Differenziale

$$(d\mathbf{R}_4)^2 = (d\mathbf{R}_3)^2 - c^2(d\tau)^2 = (d\mathbf{R}_3^0)^2 - c^2(dt^0)^2 = (d\mathbf{R}_4^0)^2 \quad (3.6.4)$$

3.63 Die Bewegung eines materiellen Punktes

Partikel "ruhen" im LAGRANGESchen System, bewegen

sich aber gegenüber dem EULERSchen System (Laborsystem). Es gilt:

$$\frac{D\mathbf{R}_3}{D\tau} = \mathbf{V}_3 = 0, \quad \frac{D\mathbf{R}_3^0}{Dt^0} = \mathbf{V}_3^0$$

wobei \mathbf{V}_3^0 die Geschwindigkeit der LAGRANGESchen Partikel gegenüber dem Laborsystem ist. Als Folgerung erhält man

$$\frac{D\mathbf{R}_4}{D\tau} = \mathbf{V}_3 + \mathbf{V} = \frac{D\mathbf{R}_4^0}{D\tau} = \frac{Dt^0}{D\tau} \frac{D\mathbf{R}_4^0}{Dt^0} = \frac{Dt^0}{D\tau} (\mathbf{V}_3^0 + \mathbf{V}_0^0)$$

Führt man den charakteristischen Parameter λ durch

$$\lambda = Dt^0/D\tau \quad (3.6.5)$$

ein, dann erhält man für den Vierervektor \mathbf{V}

$$\mathbf{V} = \lambda(\mathbf{V}_3^0 + \mathbf{V}_0^0) \quad (3.6.6)$$

Wegen $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = -c^2 = \lambda^2[(\mathbf{V}_3^0)^2 - c^2]$ ergibt sich

$$\lambda^2 = 1/[1 - (\mathbf{V}_3^0/c)^2] \quad (3.6.7)$$

d. h., ein bekanntes Ergebnis.

Im Folgenden wird dimensionslos gerechnet werden, insbesondere wird verwendet:

$$\mathbf{u} = \lambda(\mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_0^0) \quad (3.6.8)$$

mit $\mathbf{u}_3^0 = \mathbf{V}_3^0/c$.

Damit wird $\lambda^2 = 1/[1 - (\mathbf{u}_3^0)^2]$.

3.64 Die allgemeine LORENTZ- Transformation

Im Allgemeinen bewegt sich ein beliebiger materieller Punkt (kein LAGRANGESches Materieteilchen) mit einer (Vierer-) Geschwindigkeit \mathbf{V}_3 im LAGRANGESchen Kontinuum. Dieser Fall entspricht einer allgemeinen LORENTZ- Transformation.

Es wird von der **Invarianz** allgemeiner 4-dimensionalen extensiven Größen ausgegangen, und es werden dann Zeit- und räumliche Anteile betrachtet. Es gilt zwischen LAGRANGESchem und EULERSchem System für alle extensive Größen, etwa auch für \mathbb{E}_4 ,

$$\mathbb{E}_4 = \mathbb{E}_4^0 \quad (3.6.9)$$

Es wird zunächst der Projektionstensor \mathcal{P}_3 betrachtet.

Die Identitätsdyade $\mathbb{I}_4 = \mathcal{P}_3 - \mathbf{u}\mathbf{u}$ ist eine Invariante

$$\mathbb{I}_4 = \mathcal{P}_3 - \mathbf{u}\mathbf{u} = \mathbb{I}_4^0 = \mathcal{P}_3^0 - \mathbf{u}_0^0\mathbf{u}_0^0$$

und somit

$$\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_3^0 + \mathbf{u}\mathbf{u} - \mathbf{u}_0^0\mathbf{u}_0^0.$$

Setzt man für \mathbf{u} (3.5.8) ein, dann ergibt sich

$$\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_3^0 + \lambda^2(\mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_0^0)(\mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_0^0) - \mathbf{u}_0^0\mathbf{u}_0^0$$

und somit

$$\mathcal{P}_3 = \lambda^2 \left[\frac{1}{\lambda^2} \mathcal{P}_3^0 + \mathbf{u}_3^0\mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_0^0\mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_3^0\mathbf{u}_0^0 + \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \mathbf{u}_0^0\mathbf{u}_0^0 \right]$$

$$= \lambda^2 [\mathcal{P}_3^0 + (\mathcal{P}_3^0 \times \mathbf{u}_3^0) \times \mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_0^0\mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_3^0\mathbf{u}_0^0 + (\mathbf{u}_3^0)^2 \mathbf{u}_0^0\mathbf{u}_0^0]$$

bzw.

$$= \lambda^2 [\mathcal{P}_3^0 + \mathbf{u}_3^0 \times (\mathbf{u}_3^0 \times \mathcal{P}_3^0) + \mathbf{u}_0^0\mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_3^0\mathbf{u}_0^0 + (\mathbf{u}_3^0)^2 \mathbf{u}_0^0\mathbf{u}_0^0]$$

Es ist bei Verwendung von (3.5.8) tatsächlich $\mathcal{P}_3 \cdot \mathbf{u} = 0$.

Dieser Tensor vermittelt die Projektion von extensiven Größen auf die räumliche Basis. Er möge LORENTZ-Tensor genannt werden und eine neue Bezeichnung erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_3^0 = & \quad (3.6.10) \\ & = \lambda^2 [\mathcal{P}_3^0 + (\mathcal{P}_3^0 \times \mathbf{u}_3^0) \times \mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_0^0\mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_3^0\mathbf{u}_0^0 \\ & \quad + (\mathbf{u}_3^0)^2 \mathbf{u}_0^0\mathbf{u}_0^0] \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbb{L}_3^0 = \lambda^2 [\mathcal{P}_3^0 + \mathbf{u}_3^0 \times (\mathbf{u}_3^0 \times \mathcal{P}_3^0) + \mathbf{u}_0^0 \mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_3^0 \mathbf{u}_0^0 + (\mathbf{u}_3^0)^2 \mathbf{u}_0^0 \mathbf{u}_0^0] \quad (3.6.11)$$

Damit ergeben sich die räumlichen Anteile eines

4D-Tensors aus:

$$\mathbb{E}_4 \cdot \mathcal{P}_3 = \mathbb{E}_4^0 \cdot \mathbb{L}_3^0 \quad (3.6.12)$$

während sich die zeitlichen Anteile aus

$$\mathbb{E}_4 \cdot \mathbf{u} = \mathbb{E}_4^0 \cdot \mathbf{u} = \mathbb{E}_4^0 \cdot \lambda (\mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_0^0) \quad (3.6.13)$$

berechnen.

Zunächst wird ein 4D-Vektor \mathbf{A}_4 betrachtet:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_4 &= \mathbf{A}_4 \cdot \mathcal{P}_3 + (-\mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} = \\ &= \mathbf{A}_3 + A_0 \mathbf{u} = \mathbf{A}_3^0 + A_0^0 \mathbf{u}_0^0 \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

Mit (8.11), (8.13) folgen der räumlicher Anteil zu

$$\mathbf{A}_4 \cdot \mathbb{L}_3^0 = \lambda^2 \left[(\mathbf{A}_3^0 - A_0^0 \mathbf{u}_3^0) + (\mathbf{A}_3^0 \times \mathbf{u}_3^0) \times \mathbf{u}_3^0 + (\mathbf{A}_3^0 - A_0^0 \mathbf{u}_3^0) \cdot \mathbf{u}_3^0 \mathbf{u}_0^0 \right]$$

sowie der zeitliche Anteil zu

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{u} &= \lambda (\mathbf{A}_3^0 + A_0^0 \mathbf{u}_0^0) \cdot (\mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_0^0) \\ A_0 &= \lambda (\mathbf{A}_3^0 \cdot \mathbf{u}_3^0 - A_0^0) \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

Dies ist die kovariante Form der allgemeinen eigentlichen LORENTZ-Transformation eines 4D-Vektors. Die Anwendung der Transformation auf den 4D-Tensor gemäß (3.5.9) gestaltet sich ebenso.

Zum Beispiel gilt für den Nabla- Operator mit mit $\mathbf{A}_3^0 = \nabla_3^0$, $A_0^0 = -\partial/\partial s^0$ in (3.5.15)

$$\begin{aligned} \nabla_4 &= \nabla_3 - \mathbf{u} \frac{D}{Ds} = \nabla_3^0 - \mathbf{u}_0^0 \frac{\partial}{\partial s^0} \\ \nabla_3 &= \lambda^2 \left[\left(\nabla_3^0 + \mathbf{u}_3^0 \frac{\partial}{\partial s^0} \right) + \mathbf{u}_3^0 \times (\mathbf{u}_3^0 \times \nabla_3^0) + \left(\nabla_3^0 + \mathbf{u}_3^0 \frac{\partial}{\partial s^0} \right) \cdot \mathbf{u}_3^0 \mathbf{u}_0^0 \right] \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

$$\frac{D}{Ds} = \lambda \left(\mathbf{u}_3^0 \cdot \nabla_3^0 + \frac{\partial}{\partial s^0} \right) = \lambda \frac{D}{Ds^0} \quad \text{mit } s^0 = c t^0 \quad (3.6.18)$$

wobei $\partial/\partial s^0$ die lokale partielle Ableitung und D/Ds^0 die materielle Ableitung nach der Koordinate s im Laborsystem sind. Wegen (3.5.5) ist $\lambda D\tau = Dt^0$, somit $\lambda Ds = Ds^0$ mit

$$\frac{D}{D\tau} = \lambda \left(\nabla_3^0 \cdot \nabla_3^0 + \frac{\partial}{\partial t^0} \right) = \lambda \frac{D}{Dt^0}$$

Die Umschreibung beider Ergebnisse in

$$\nabla_3 = \lambda^2 \left[\left(\nabla_3^0 + \frac{1}{c^2} \nabla_3^0 \frac{\partial}{\partial \tau^0} \right) + \mathbf{u}_3^0 \times (\mathbf{u}_3^0 \times \nabla_3^0) + \left(\nabla_3^0 + \frac{1}{c^2} \nabla_3^0 \frac{\partial}{\partial \tau^0} \right) \cdot \nabla_3^0 \mathbf{V}_0^0 \right] \quad (3.6.17)$$

$$\frac{D}{Ds} = \lambda \left(\mathbf{u}_3^0 \cdot \nabla_3^0 + \frac{\partial}{\partial s^0} \right) = \lambda \frac{D}{Ds^0} \quad (3.6.18)$$

3.65 Die LORENTZ- Transformation der Differenziale

Skalare Multiplikation mit \mathbf{u} liefert den zeitlichen Anteil:

$$\begin{aligned} d\mathbf{R}_4 \cdot \mathbf{u} &= d\mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{u} + ds \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (d\mathbf{R}_3^0 + ds^0 \mathbf{u}_0^0) \cdot \mathbf{u} = \\ &= 0 - ds = \lambda (d\mathbf{R}_3^0 + ds^0 \mathbf{u}_0^0) \cdot (\mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_0^0) = \\ &= \lambda (d\mathbf{R}_3^0 \cdot \mathbf{u}_3^0 - ds^0) \end{aligned}$$

womit folgt

$$ds = \lambda (ds^0 - d\mathbf{R}_3^0 \cdot \mathbf{u}_3^0) \quad (3.6.17)$$

$$d\tau = \lambda \left(dt^0 - \frac{1}{c^2} d\mathbf{R}_3^0 \cdot \mathbf{V}_3^0 \right) \quad (3.6.9a)$$

Im Spezialfall dass es sich um eine LAGRANGEsche Partikel handelt ergibt sich das o. a. Ergebnis, dann nämlich wenn es sich bei $d\mathbf{R}_3^0$ um die Verschiebung dieser Partikel handelt und somit $d\mathbf{R}_3^0/Ds^0 = \mathbf{u}_3^0$. Dann ist $ds = \lambda (ds^0 - d\mathbf{R}_3^0 \cdot \mathbf{u}_3^0) = \lambda (1 - \mathbf{u}_3^0 \cdot \mathbf{u}_3^0) ds^0$ und somit $ds = ds^0/\lambda$ (A6.10)

Zur Ermittlung des räumlicher Anteils wird (8.3) in folgender Form verwendet:

$$\begin{aligned} d\mathbf{R}_3 &= d\mathbf{R}_4 - ds \mathbf{u} = (d\mathbf{R}_3^0 + ds^0 \mathbf{u}_0^0) - \\ &= -\lambda^2 (ds^0 - d\mathbf{R}_3^0 \cdot \mathbf{u}_3^0) (\mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_0^0) = \\ &= \lambda^2 \left[\frac{1}{\lambda^2} (d\mathbf{R}_3^0 + ds^0 \mathbf{u}_0^0) - (ds^0 - d\mathbf{R}_3^0 \cdot \mathbf{u}_3^0) (\mathbf{u}_3^0 + \mathbf{u}_0^0) \right] \\ &= \lambda^2 \left[(1 - (\mathbf{u}_3^0)^2) (d\mathbf{R}_3^0 + ds^0 \mathbf{u}_0^0) - \right. \\ &= \lambda^2 \left[(d\mathbf{R}_3^0 - ds^0 \mathbf{u}_3^0) - d\mathbf{R}_3^0 (\mathbf{u}_3^0)^2 + d\mathbf{R}_3^0 \cdot \mathbf{u}_3^0 \mathbf{u}_0^0 \right. \\ &= \lambda^2 \left[(d\mathbf{R}_3^0 - ds^0 \mathbf{u}_3^0) + (d\mathbf{R}_3^0 \times \mathbf{u}_3^0) \times \mathbf{u}_3^0 + \right. \\ &= \lambda^2 \left[(d\mathbf{R}_3^0 - ds^0 \mathbf{u}_3^0) \cdot \mathbf{u}_3^0 \mathbf{u}_0^0 \right. \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

bzw. nach Einführung der Zeiten (3.6.19)

$$d\mathbf{R}_3 = \lambda^2 \left[(d\mathbf{R}_3^0 - dt^0 \mathbf{V}_3^0) + \frac{1}{c^2} (d\mathbf{R}_3^0 \times \mathbf{V}_3^0) \times \mathbf{V}_3^0 + \frac{1}{c^2} (d\mathbf{R}_3^0 - dt^0 \mathbf{V}_3^0) \cdot \mathbf{V}_3^0 \mathbf{V}_0^0 \right]$$

Dies ist die allgemeine LORENTZ-Transformation zwischen einer vektoriellen Größe im LAGRANGESchen System und seiner Entsprechung im EULERSchen System.

Man erkennt, dass der zweite Term Drehungen beinhaltet und dass der dritte Term eine Komponente in Richtung der Zeitachse des Laborsystems darstellt (neu?).

3.66 Additionstheorem der Geschwindigkeiten

Dividiert man (8.11) durch $ds = \lambda (ds^0 - d\mathbf{R}_3^0 \cdot \mathbf{u}_3^0)$, dann erhält man den Geschwindigkeitsvektor derjenigen Partikel, die sich durch das sich ebenfalls bewegende LAGRANGEsche Feld hindurch bewegt: (3.6.20)

$$\frac{d\mathbf{R}_3}{Ds} = \frac{\lambda}{1 - (d\mathbf{R}_3^0/Ds^0) \cdot \mathbf{u}_3^0} \left[(d\mathbf{R}_3^0/Ds^0 - \mathbf{u}_3^0) + ((d\mathbf{R}_3^0/Ds^0) \times \mathbf{u}_3^0) \times \mathbf{u}_3^0 + (d\mathbf{R}_3^0/Ds^0 - \mathbf{u}_3^0) \cdot \mathbf{u}_3^0 \mathbf{u}_0^0 \right]$$

Im Falle der Bewegung einer Partikel des Kontinuums ist $d\mathbf{R}_3^0/Ds^0 = \mathbf{u}_3^0$ und daher $d\mathbf{R}_3/Ds = 0$.

Führt man anstelle der Bogenlängen der Weltlinie wieder die Zeiten ein, dann erhält man mit $ds = cd\tau$ und $ds^0 = cdt^0$ (3.6.21)

$$\frac{d\mathbf{R}_3}{D\tau} = \frac{\lambda}{1 - (d\mathbf{R}_3^0/Dt^0) \cdot \mathbf{V}_3^0} \left[(d\mathbf{R}_3^0/Dt^0 - \mathbf{V}_3^0) + \frac{1}{c^2} ((d\mathbf{R}_3^0/Dt^0) \times \mathbf{V}_3^0) \times \mathbf{V}_3^0 + \frac{1}{c^2} (d\mathbf{R}_3^0/Dt^0 - \mathbf{V}_3^0) \cdot \mathbf{V}_3^0 \mathbf{V}_0^0 \right]$$

Mit $d\mathbf{R}_3/D\tau = \mathbf{U}_3$ und $d\mathbf{R}_3^0/Dt^0 = \mathbf{U}_3^0$ erhält man (8.18)

$$\mathbf{U}_3 = \frac{\lambda}{1 - \mathbf{U}_3^0 \cdot \mathbf{V}_3^0} \left[\begin{aligned} &(\mathbf{U}_3^0 - \mathbf{V}_3^0) + \frac{1}{c^2} (\mathbf{U}_3^0 \times \mathbf{V}_3^0) \times \mathbf{V}_3^0 + \\ &+ \frac{1}{c^2} (\mathbf{U}_3^0 - \mathbf{V}_3^0) \cdot \mathbf{V}_3^0 \mathbf{V}_3^0 \end{aligned} \right]$$

Dies ist das berühmte Additionstheorem der Geschwindigkeiten (in beachtlicher Verallgemeinerung).

Der Spezialfall $\mathbf{V}_3^0 = V_x^0 \mathbf{i}^0$

Die in der Literatur angegebenen Formeln für die LORENTZ-Transformation beziehen sich meist auf den Spezialfall $\mathbf{V}_3^0 = V_x^0 \mathbf{i}^0$

$$d\mathbf{R}_3 = \lambda^2 \left[\begin{aligned} &(d\mathbf{R}_3^0 - dt^0 V_x^0 \mathbf{i}^0) + \frac{1}{c^2} (d\mathbf{R}_3^0 \times V_x^0 \mathbf{i}^0) \times V_x^0 \mathbf{i}^0 + \\ &+ \frac{1}{c^2} (d\mathbf{R}_3^0 - dt^0 V_x^0 \mathbf{i}^0) \cdot V_x^0 \mathbf{i}^0 \mathbf{V}_0^0 \end{aligned} \right]$$

$$\mathbf{A}_3 = \lambda^2 \left[\begin{aligned} &\left(\mathbf{A}_3^0 - \frac{A_x^0}{c} V_x^0 \mathbf{i}^0 \right) + \frac{1}{c^2} (\mathbf{A}_3^0 \times V_x^0 \mathbf{i}^0) \times V_x^0 \mathbf{i}^0 + \\ &+ \frac{1}{c^2} \left(\mathbf{A}_3^0 - \frac{A_x^0}{c} V_x^0 \mathbf{i}^0 \right) \cdot V_x^0 \mathbf{i}^0 \mathbf{V}_0^0 \end{aligned} \right]$$

\mathbf{U}_3 = In Komponenten des Laborsystems dargestellt ist dies:

$$d\mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{i}^0 = \lambda^2 [dR_x^0 - dt^0 V_x^0]$$

$$d\mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{j}^0 = \lambda^2 \left[1 - \frac{V_x^0{}^2}{c^2} \right] A_y^0 = A_y^0$$

$$d\mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{k}^0 = \lambda^2 \left[1 - \frac{V_x^0{}^2}{c^2} \right] A_z^0 = A_{yz}^0$$

$$d\mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{V}_0^0 = -\lambda^2 [(A_x^0 - dt^0 V_x^0) V_x^0] = -\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{i}^0 V_x^0$$

$$\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{i}^0 = \lambda^2 \left[A_x^0 - \frac{A_x^0}{c} V_x^0 \right]$$

$$\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{j}^0 = \lambda^2 \left[1 - \frac{V_x^0{}^2}{c^2} \right] A_y^0 = A_y^0$$

$$\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{k}^0 = \lambda^2 \left[1 - \frac{V_x^0{}^2}{c^2} \right] A_z^0 = A_{yz}^0$$

$$\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{V}_0^0 = -\lambda^2 \left[\left(A_x^0 - \frac{A_x^0}{c} V_x^0 \right) V_x^0 \right] = -\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{i}^0 V_x^0$$

$$\mathbf{U}_3 \cdot \mathbf{i}^0 = \lambda \frac{U_x^0 - V_x^0}{1 - U_x^0 V_x^0}$$

$$\mathbf{U}_3 \cdot \mathbf{j}^0 = \frac{\lambda}{1 - U_x^0 V_x^0} \left[U_y^0 - \frac{1}{c^2} (U_y^0 (V_x^0)^2) \right] = \frac{U_y^0}{\lambda(1 - U_x^0 V_x^0)}$$

$$\mathbf{U}_3 \cdot \mathbf{k}^0 = \frac{\lambda}{1 - U_x^0 V_x^0} \left[U_z^0 - \frac{1}{c^2} (U_z^0 (V_x^0)^2) \right] = \frac{U_z^0}{\lambda(1 - U_x^0 V_x^0)}$$

$$\mathbf{U}_3 \cdot \mathbf{V}_0^0 = -\frac{\lambda}{1 - \mathbf{U}_3^0 \cdot \mathbf{V}_3^0} \left[\frac{1}{c} (U_x^0 - V_x^0) V_x^0 \right]$$

Die Transformation ist hiermit allerdings noch nicht abgeschlossen. Sie ist es erst, wenn auch noch die Transformation der Basisvektoren im bewegten System transformiert worden sind.

Benutzt man im LAGRANGESchen System ebenfalls cartesische Koordinaten dann ist für den Vektor $\mathbf{A}_3 = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ und man benötigt die Skalarprodukte der Einheitsvektoren $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}^0, \mathbf{j}^0$, u. s. w. Dies ist eine

große Anzahl für welche entsprechend umfangreiche Gleichungssysteme zu lösen sind.

3.7 Ergänzung: Kurzableitung für ein ideales Fluid

Abschließend soll am Beispiel eines idealen und kompressiblen Fluids gezeigt werden wie leicht sich die hierfür zuständigen Gleichungen mittels der verwendeten Methode speziell relativistisch und in LAGRANGEScher Form ableiten lassen.

Es galt für die Hydro-Thermodynamik idealer und kompressibler Fluide

$$\mathbb{E}_{4,s} = -p \mathbb{1}_4 - \mathbf{H}\mathbf{u}\mathbf{u} \quad (1.2')$$

mit der volumenspezifischen Enthalpie

$$H = p + E^* + E_0 = H^* + E_0.$$

Anwendung der 4D-Divergenz ergibt zunächst

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{E}_{4,s} = -\nabla_4 p - \nabla_4 \cdot (\mathbf{H}\mathbf{u}\mathbf{u})$$

und mit

$$\nabla_4 \cdot (\mathbf{H}\mathbf{u}\mathbf{u}) = H \frac{D\mathbf{u}}{Ds} + \frac{D_{III}H}{Ds} \mathbf{u}$$

ergibt sich

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{E}_{4,s} = -\nabla_3 p + \frac{Dp}{Ds} \mathbf{u} - H \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - \frac{D_{III}H}{Ds} \mathbf{u} = -\mathbf{Q}_{4,s}$$

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{E}_{4,s} = -\nabla_3 p - H \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - \left(\frac{D_{III}H}{Ds} - \frac{Dp}{Ds} \right) \mathbf{u} = \varrho \nabla_3 \phi$$

da (hier ausnahmsweise) konventionell

$$\mathbf{Q}_{4,s} = -\varrho \nabla_3 \phi$$

Die Enthalpie H als Summe ihrer Anteile eingesetzt gibt

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{E}_{4,s} = -\nabla_3 p - H \frac{D\mathbf{u}}{Ds} -$$

$$- \left(\frac{D_{III}E^*}{Ds} + \frac{D_{III}E_0}{Ds} + p \nabla_4 \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{u} = \varrho \nabla_3 \phi$$

Der räumliche Anteil ist

$$H \frac{D\mathbf{u}}{Ds} = -\nabla_3 p - \varrho \nabla_3 \phi$$

und der zeitliche

$$\frac{D_{III}E^*}{Ds} + \frac{D_{III}E_0}{Ds} + p \nabla_4 \cdot \mathbf{u} = 0$$

Beachtet man, dass die (volumenspezifische) Ruheenergie eine materielle Invariante ist, und geht man zu physikalischen Variablen über, dann ergibt sich

$$\frac{H}{c^2} \frac{DV}{D\tau} \approx \varrho \frac{DV}{D\tau} = \frac{D_{III}\varrho V}{D\tau} = -\nabla_3 p - \varrho \nabla_3 \phi$$

$$\frac{D_{III}E^*}{D\tau} = -p \nabla_3 \cdot \mathbf{V}$$

$$\frac{D_{III}E_0}{D\tau} = c^2 \frac{D_{III}\varrho}{D\tau} = 0$$

wobei wegen $E_0 = \varrho c^2$ die letzte Gleichung mit der Kontinuitätsgleichung identisch ist.

Dies sind bekannte Gleichungen für diesen Spezialfall, abgeleitet aus dem geometrisch erhaltenen Ansatz (1.2'): EULERSche Bewegungsgleichung, Erster Hauptsatz und Kontinuitätsgleichung.

3.8 Wirbeldynamik

Sei ein asymmetrischer Tensor $\mathbb{T}_{4,as}$ gegeben durch

$$\mathbb{T}_{4,as} = \nabla_4 \mathbf{V} - \mathbf{V} \nabla_4 = \nabla_3 \mathbf{V} - \mathbf{V} \nabla_3 - \frac{\mathbf{V} D\mathbf{V}}{c^2 D\tau} + \frac{D\mathbf{V} \mathbf{V}}{D\tau c^2}$$

wobei verwendet wurde

$$\nabla_4 = \nabla_3 - \frac{\mathbf{V}}{c^2} \frac{D}{D\tau}$$

Schreibt man

$$\nabla_3 \mathbf{V} - \mathbf{V} \nabla_3 = \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3$$

mit der Umkehrung

$$\mathbf{F}_{3,as}^d = \frac{1}{2} (\nabla_3 \mathbf{V} - \mathbf{V} \nabla_3) : \boldsymbol{\epsilon}_3 = \nabla_3 \times \mathbf{V}$$

dann erhält man

$$\mathbb{T}_{4,as} = \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3 + \frac{\mathbf{V}}{c^2} \left(-\frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \right) - \left(-\frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \right) \frac{\mathbf{V}}{c^2}$$

$$\mathbb{T}_{4,as}^d = \left(-\frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \right) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3 - \left(\frac{\mathbf{V}}{c^2} \mathbf{F}_{3,as}^d - \mathbf{F}_{3,as}^d \frac{\mathbf{V}}{c^2} \right)$$

wobei man die Gleichung für den dualen analog zu früherem gleich hinschreiben konnte.

Die Standardversionen des asymmetrischen und des zugeordneten dualen Tensors waren:

$$\mathbb{T}_{4,as} = \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3 + \frac{\mathbf{V}}{c^2} \mathbf{F}_{3,as}^* - \mathbf{F}_{3,as}^* \frac{\mathbf{V}}{c^2}$$

$$\mathbb{T}_{4,as}^d = \mathbf{F}_{3,as}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3 - \left(\frac{\mathbf{V}}{c^2} \mathbf{F}_{3,as}^d - \mathbf{F}_{3,as}^d \frac{\mathbf{V}}{c^2} \right)$$

Divergenzbildung führte hieraus zu den Gleichungen der MAXWELL-Physik

1. Asymmetrischer Tensor

$$\frac{D_{II}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}^*}{c^2} \right) + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^d = -\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^* = -\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{V}$$

2. Zugeordneter dualer Tensor

$$\frac{D_{II}}{D\tau} \mathbf{F}_{3,as}^d - \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^* = 0$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d = 0$$

Der Allgemeinheit halber wurde die Existenz eines Quellvektors $\mathbf{Q}_{4,as}$ zugelassen.

Bildet man die 3D-Divergenz der ersten Gleichung von 1., dann ergibt sich mit der zugehörigen zweiten Gleichung

$$\frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) = \nabla_3 \cdot (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3)$$

Integriert man dies über ein materielles Volumen, dann ergibt sich eine interessante Beziehung zwischen den beiden Komponenten des Quellvektors

$$\frac{D}{D\tau} \iiint_V dV \left(\frac{\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) = \iint_0 d\boldsymbol{o} \cdot (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3)$$

bzw.

$$\frac{D}{D_S} \iiint_V dV (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{u}) = \iint_0 d\boldsymbol{o} \cdot (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3)$$

Diese, auch den Quellvektor der Elektrodynamik betreffenden Beziehungen müssen dort diskutiert werden.

Setzt man nun in den Gleichungen 1. und 2.

$$\mathbf{F}_{3,as}^* = -D\mathbf{V}/D\tau, \quad \mathbf{F}_{3,as}^d = \nabla_3 \times \mathbf{V}$$

dann folgt wegen ⁷

$$\mathbf{F}_{3,as}^* \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d = 0$$

zunächst die Relation

$$(\nabla_3 \times \mathbf{V}) \cdot (D\mathbf{V}/D\tau) = 0$$

eine Relation, die bisher nicht aufgetreten war!

Die Gleichungen der Maxwell-Physik sind dann:

1. Asymmetrischer Tensor

$$\frac{D_{II}}{D\tau} \left(\frac{1}{c^2} \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \right) + \nabla_3 \times (\nabla_3 \times \mathbf{V}) = \mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3$$

$$\nabla_3 \cdot \left(\frac{D\mathbf{V}}{D\tau} \right) = \mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{V}$$

2. Zugeordneter dualer Tensor

$$\frac{D_{II}}{D\tau} (\nabla_3 \times \mathbf{V}) - \nabla_3 \times \left(\frac{D_1 \mathbf{V}}{Dt} \right) = 0 : \text{Definitionsgleichung}$$

$$\nabla_3 \cdot (\nabla_3 \times \mathbf{V}) = 0 : \text{Identität}$$

dies in der ersten Gleichung von 2. wegen

$$\frac{D_1 \mathbf{V}}{D\tau} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + (\nabla_3 \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \left(\nabla_3 \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} - \left(\nabla_3 \frac{c^2}{2} \right)$$

aber auch wegen

$$\nabla_3 \times \left(\nabla_3 \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = 0$$

Kennt man für ein physikalisches System eine Gleichung für $D_1 \mathbf{V}/D\tau$, dann liefern die vorstehenden Gleichungen, speziell diejenige für den Dualen, die bekannte Wirbelgleichung der Hydrodynamik in (erweiterter) LAGRANGEScher Form.

Verwendet man die hier in Kapitel 2.4 abgeleitete leicht approximierte Form der EULERSchen Bewegungsgleichung im 2. Formelsatz

$$\frac{D\mathbf{V}}{D\tau} = -v \nabla_3 \mathfrak{P} + v \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* - v \left(\frac{D_{III}}{D\tau} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} \right)$$

bzw. unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -v \nabla_3 \mathfrak{P} + v \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* - \left(\frac{D}{D\tau} \left(\frac{v \mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \right) + \frac{v \mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} \right)$$

Damit wird

$$\nabla_3 \times \left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \right) = -\nabla_3 v \times \nabla_3 \mathfrak{P} +$$

$$+ \nabla_3 \times \left[v \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* - \left(\frac{D}{D\tau} \left(\frac{v \mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \right) + \frac{v \mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} \right) \right]$$

bzw. mit der Definitionsgleichung in 2.:

$$\frac{D_{II}}{Dt} (\nabla_3 \times \mathbf{V}) = -\nabla_3 v \times \nabla_3 \mathfrak{P} +$$

$$+ \nabla_3 \times \left[v \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^* - \left(\frac{D}{D\tau} \left(\frac{v \mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \right) + \frac{v \mathbf{F}_{3,s}^*}{c^2} \cdot \nabla_3 \mathbf{V} \right) \right]$$

Dies ist die konventionelle Wirbelgleichung, doch erweitert durch einen auf Gravitation zurückgehenden Term $-\nabla_3 v \times \nabla_3 \Phi = -v \nabla_3 v \times \nabla_3 \phi$ und einen Term, der den Impuls des Wärmeflussvektors $\mathbf{F}_{3,s}^*$ beschreibt.

Wir führen nun die folgenden Abkürzungen ein:

$$\nabla_3 \times \mathbf{V} = \mathbf{Z}, \quad -\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{A}$$

Dann lauten die Formelsätze 1. und 2.

1. Formelsatz

$$\frac{D_{II}}{Dt} \left(\frac{\mathbf{A}}{c^2} \right) + \nabla_3 \times \mathbf{Z} = \mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{V}$$

bzw. nach Divergenzbildung

$$\frac{D_{III}}{Dt} \left(\frac{\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) = \mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3$$

2. Formelsatz (konventionelle Wirbelgleichung, folgte aus dem Dualen Tensor $\mathbb{T}_{4,as}^d$, der quellenfrei war).

$$\frac{D_{II}}{Dt} \mathbf{Z} - \nabla_3 \times \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{Z} = 0 \text{ (trivial)}$$

⁷ Es ist $\mathbb{T}_{4,as} \cdot \mathbb{T}_{4,as}^d = -(\mathbf{F}_{3,as}^* \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d) \mathbb{I}_4$
 $\mathbb{T}_{4,as}^d \cdot \mathbb{T}_{4,as} = 0 = -4 (\mathbf{F}_{3,as}^* \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d) = 0$

(Fortsetzung: Aussagen über zusätzliche Zusammenhänge)

3.9 Allgemeine Betrachtungen

In der Arbeit wird ein Kontinuum betrachtet, d.h. es soll sich um ein System von sehr vielen individuellen LAGRANGESchen Teilchen handeln, so wie in der LAGRANGESchen Form der 3D- Hydrodynamik. Doch umfassen die Betrachtungen jedoch alle sonst denkbaren Vielteilchensysteme die sich so wie ein Fluid verhalten. Man könnte beispielsweise auch an die Gesamtheit der Menschen auf der Erde denken. Dann würden die bisher abgeleiteten Gleichungen in der Soziologie eine Rolle spielen.

Die „Individuen“ bewegen sich im 3D- Raum und zusätzlich auf der vierten Koordinate s (im Sinne wachsender s -Werte: Zweiter Hauptsatz) in „Richtung“ des Tangentenvektors \mathbf{u} . Dabei stehen sie alle in nichtlinearer Wechselwirkung (wie in der 3D- Hydrodynamik). Diese Wechselwirkungen werden durch den 3D- Tensor $\mathbb{P}_{3,s}$ beschrieben. Hierfür liefert die vorliegende Theorie prinzipiell keine Hinweise (statistische Mechanik?). Eine zwangsweise Folge hiervon ist das Auftreten von Energiedissipation welche zu inhomogenen energetischen Feldern führt. Zum Ausgleich derselben werden Energieflussprozesse ausgelöst. Dies sind die Vektoren $\mathbf{F}_{3,s}$ gemäß der Ausgangsgleichung

$$\mathbb{T}_{4,s} = \mathbb{P}_{3,s} - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}) - E\mathbf{u}\mathbf{u}$$

An Gleichungen zur Beschreibung der Entwicklung des Systems stehen dann zur Verfügung: vektorielle Impulsgleichung und skalare Energiegleichung zusammen mit der vektoriellen (Entropie-) Gleichung für $\mathbf{F}_{3,s}/T$ und der skalaren Entropie Gleichung und der ≥ 0 - Bedingung.

Literatur

General 4D- continuum physics

H. Fortak
Freie Universität Berlin
Berlin, Germany
1978 / 2017

3.9 Allgemeine Betrachtungen

In der Arbeit wird ein Kontinuum betrachtet, d.h. es soll sich um ein System von sehr vielen individuellen LAGRANGESchen Teilchen handeln, so wie in der LAGRANGESchen Form der 3D- Hydrodynamik. Doch umfassen

die Betrachtungen jedoch alle sonst denkbaren Vielteilchensysteme die sich so wie ein Fluid verhalten. Man könnte beispielsweise auch an die Gesamtheit der Menschen auf der Erde denken. Dann würden die bisher abgeleiteten Gleichungen in der Soziologie eine Rolle spielen.

Die „Individuen“ bewegen sich im 3D- Raum und zusätzlich auf der vierten Koordinate s (im Sinne wachsender s -Werte: Zweiter Hauptsatz) in „Richtung“ des Tangentenvektors \mathbf{u} . Dabei stehen sie alle in nichtlinearer Wechselwirkung (wie in der 3D- Hydrodynamik). Diese Wechselwirkungen werden durch den 3D- Tensor $\mathbb{P}_{3,s}$ beschrieben. Hierfür liefert die vorliegende Theorie prinzipiell keine Hinweise (statistische Mechanik?). Eine zwangsweise Folge hiervon ist das Auftreten von Energiedissipation welche zu inhomogenen energetischen Feldern führt. Zum Ausgleich derselben werden Energieflussprozesse ausgelöst. Dies sind die Vektoren $\mathbf{F}_{3,s}$ gemäß der Ausgangsgleichung

$$\mathbb{T}_{4,s} = \mathbb{P}_{3,s} - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}) - E\mathbf{u}\mathbf{u}$$

An Gleichungen zur Beschreibung der Entwicklung des Systems stehen dann zur Verfügung: vektorielle Impulsgleichung und skalare Energiegleichung zusammen mit der vektoriellen (Entropie-) Gleichung für $\mathbf{F}_{3,s}/T$ und der skalaren Entropie Gleichung und der ≥ 0 - Bedingung.

Bookkeeper-Equations

(Vector-equations)

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 = -\Phi_4$$

$$\mathbb{T}_{4,s} = \mathbb{P}_{3,s} - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}) - E\mathbf{u}\mathbf{u}$$

$$\mathbb{T}_{4,as} = \mathbf{F}_{3,as}^d \cdot \epsilon_3 + (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,as} - \mathbf{F}_{3,as}\mathbf{u})$$

$$\mathbb{T}_{4,as}^d = \mathbf{F}_{3,as} \cdot \epsilon_3 - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,as}^d - \mathbf{F}_{3,as}^d\mathbf{u})$$

$$\mathbb{T}_{4,s}^D = \mathbb{P}_{3,s}^D - (\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s}^D + \mathbf{F}_{3,s}^D\mathbf{u}) - E^D\mathbf{u}\mathbf{u}$$

wobei die zusammengesetzten Feldgrößen sind:

$$\mathbb{P}_{3,s}^D = (\mathbf{F}_{3,as}\mathbf{F}_{3,as} + \mathbf{F}_{3,as}^d\mathbf{F}_{3,as}^d) - E^D\mathcal{P}_3$$

$$\mathbf{F}_{3,s}^D = \mathbf{F}_{3,as} \times \mathbf{F}_{3,as}^d$$

$$2E^D = (\mathbf{F}_{3,as})^2 + (\mathbf{F}_{3,as}^d)^2$$

Manager-Equations

(Vector-equations)

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{Z}_4 = -\Phi_4$$

$$\mathbb{Z}_{4,s} = \mathbb{R}_{3,s} - (\mathbf{u}\mathbf{S}_{3,s} + \mathbf{S}_{3,s}\mathbf{u}) - S\mathbf{u}\mathbf{u}$$

$$\mathbb{Z}_{4,as} = \mathbf{S}_{3,as}^d \cdot \epsilon_3 + (\mathbf{u}\mathbf{S}_{3,as} - \mathbf{S}_{3,as}\mathbf{u})$$

$$\mathbb{Z}_{4,as}^d = \mathbf{S}_{3,as} \cdot \epsilon_3 - (\mathbf{u}\mathbf{S}_{3,as}^d - \mathbf{S}_{3,as}^d\mathbf{u})$$

$$\mathbb{Z}_{4,s}^D = \mathbb{R}_{3,s}^D - (\mathbf{u}\mathbf{S}_{3,s}^D + \mathbf{S}_{3,s}^D\mathbf{u}) - S^D\mathbf{u}\mathbf{u}$$

wobei die zusammengesetzten Feldgrößen sind:

$$\mathbb{R}_{3,s}^D = (\mathbf{S}_{3,as}\mathbf{S}_{3,as} + \mathbf{S}_{3,as}^d\mathbf{S}_{3,as}^d) - S^D\mathcal{P}_3$$

$$\mathbf{S}_{3,s}^D = \mathbf{S}_{3,as} \times \mathbf{S}_{3,as}^d$$

$$2S^D = (\mathbf{S}_{3,as})^2 + (\mathbf{S}_{3,as}^d)^2$$

The connection with the bookkeeper equations is obtained by introducing an integrating denominator Θ

$$\frac{1}{\theta} \nabla_4 \cdot \mathbb{Z}_4 = \nabla_4 \cdot \frac{\mathbb{Z}_4}{\theta} - \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \mathbb{Z}_4 = -\frac{\Phi_4}{\theta}$$

$$\mathbb{R}_{3,s} = \frac{\mathbb{P}_3}{\theta}, \quad \mathbf{S}_3 = \frac{\mathbf{F}_3}{\theta}, \quad S = \frac{E}{\theta}$$

$$\nabla_4 \cdot \frac{\mathbb{Z}_4}{\theta} = \theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \frac{\mathbb{Z}_4}{\theta} - \frac{\Phi_4}{\theta}$$

$$\frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} = \frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} - \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} + \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \mathbf{u} \right) - \frac{E}{\theta} \mathbf{u} \mathbf{u}$$

$$\frac{\mathbb{Z}_{4,as}}{\theta} = \frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} \cdot \epsilon_3 + \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} - \frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} \mathbf{u} \right)$$

$$\frac{\mathbb{Z}_{4,as}^d}{\theta} = \frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} \cdot \epsilon_3 - \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} - \frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} \mathbf{u} \right)$$

$$\frac{\mathbb{Z}_{4,s}^D}{\theta} = \frac{\mathbb{P}_{3,s}^D}{\theta} - \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,s}^D}{\theta} + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^D}{\theta} \mathbf{u} \right) - S^D \mathbf{u} \mathbf{u}$$

wobei die zusammengesetzten Feldgrößen sind:

$$\frac{\mathbb{P}_{3,s}^D}{\theta} = \frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} \frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} + \frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} \frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} - S^D \mathcal{P}_3$$

$$\mathbf{S}_{3,s}^D = \frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} \times \frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta}$$

$$2S^D = \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} \right)^2$$

Bookkeeper-Equations

(Vector-equations)

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 = -\Phi_4$$

$$-\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,s} =$$

$$= \left(\frac{D_{III} \mathbf{F}_{3,s}}{Ds} + \mathbf{F}_{3,s} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} + \left(E \mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s} \right) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \cdot \mathcal{P}_3 + \left(\frac{D_{III} E}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s} - \mathbb{P}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{u} + 2 \mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \mathbf{u} = \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3 - (\mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}$$

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,as} =$$

$$= \left(\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}}{Ds} - \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as}^d \right) \cdot \mathcal{P}_3 - (\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}) \mathbf{u} = -\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3 + (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}$$

$$-\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,as}^d =$$

$$= \left(\frac{D_{II} \mathbf{F}_{3,as}^d}{Ds} + \nabla_3 \times \mathbf{F}_{3,as} \right) \cdot \mathcal{P}_3 - (\nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,as}^d) \mathbf{u} = 0$$

$$-\nabla_4 \cdot \mathbb{T}_{4,s}^D =$$

$$= \left(\frac{D_{III} \mathbf{F}_{3,s}^D}{Ds} + \mathbf{F}_{3,s}^D \cdot \nabla_3 \mathbf{u} - \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s}^D + \left(E^D \mathcal{P}_3 - \mathbf{F}_{3,s}^D \right) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \cdot \mathcal{P}_3 + \left(\frac{D_{III} E^D}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s}^D - \mathbb{P}_{3,s}^D : \nabla_3 \mathbf{u} + 2 \mathbf{F}_{3,s}^D \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \mathbf{u} = \mathbf{Q}_{4,s}^D = \mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbb{T}_{4,as}$$

Manager-Equations

(Vector-equations)

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{Z}_4 = -\Phi_4$$

$$\nabla_4 \cdot \frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} = \theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \frac{\mathbb{Z}_4}{\theta} - \frac{\Phi_4}{\theta}$$

$$\begin{aligned} -\nabla_4 \cdot \frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} &= \left(\frac{D_{III} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \right)}{Ds} + \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} - \nabla_3 \cdot \left(\frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} \right) + \left(\frac{E}{\theta} \mathcal{P}_3 - \frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} \right) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \cdot \mathcal{P}_3 + \left(\frac{D_{III} \left(\frac{E}{\theta} \right)}{Ds} + \nabla_3 \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \right) - \left(\frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} \right) : \nabla_3 \mathbf{u} + 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \mathbf{u} = \\ &= \left(-\theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \frac{\mathbb{Z}_4}{\theta} + \frac{\Phi_4}{\theta} \right) \cdot \mathcal{P}_3 - \left(\left(-\theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \frac{\mathbb{Z}_4}{\theta} + \frac{\Phi_4}{\theta} \right) \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\nabla_4 \cdot \frac{\mathbb{Z}_{4,as}}{\theta} =$$

$$= \left(\frac{D_{II} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} \right)}{Ds} - \nabla_3 \times \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} \right) \right) \cdot \mathcal{P}_3 - \left(\nabla_3 \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} \right) \right) \mathbf{u} = -\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathcal{P}_3 + (\mathbf{Q}_{4,as} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}$$

$$-\nabla_4 \cdot \frac{\mathbb{Z}_{4,as}^d}{\theta} =$$

$$= \left(\frac{D_{II} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} \right)}{Ds} + \nabla_3 \times \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} \right) \right) \cdot \mathcal{P}_3 - \left(\nabla_3 \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} \right) \right) \mathbf{u} = 0$$

$$-\nabla_4 \cdot \frac{\mathbb{Z}_{4,s}^D}{\theta} =$$

$$= \left(\frac{D_{III} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^D}{\theta} \right)}{Ds} + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^D}{\theta} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} - \nabla_3 \cdot \left(\frac{\mathbb{P}_{3,s}^D}{\theta} \right) + \left(\frac{E^D}{\theta} \mathcal{P}_3 - \frac{\mathbf{F}_{3,s}^D}{\theta} \right) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \cdot \mathcal{P}_3 + \left(\frac{D_{III} \left(\frac{E^D}{\theta} \right)}{Ds} + \nabla_3 \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}^D}{\theta} \right) - \frac{\mathbb{P}_{3,s}^D}{\theta} : \nabla_3 \mathbf{u} + 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}^D}{\theta} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \mathbf{u} = \mathbf{Q}_{4,s}^D = \mathbf{Q}_{4,as} \cdot \frac{\mathbb{Z}_{4,s}^D}{\theta}$$

Sei

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_0 \mathbf{u} = \nabla_4 \cdot \mathbb{T}_4 \text{ bzw. } \nabla_4 \cdot \frac{\mathbb{Z}_4}{\theta}$$

Divergence-equations

(Scalar equations)

$$\nabla_4 \cdot \mathbf{A}_4 = \frac{D_{III} \mathbf{A}_0}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3 \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds}$$

„Vorticity-equations“

(Tensor-equations)

$$(\nabla_4 \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_4 \nabla_4)^d = \frac{1}{2} (\nabla_4 \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_4 \nabla_4) : \epsilon_4 \equiv$$

$$\begin{aligned} \nabla_4 \times \mathbf{A}_4 &= - \left(\frac{D\mathbf{A}_3}{Ds} + \nabla_3 A_0 + A_0 \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \cdot \epsilon_3 - \\ &- \mathbf{u} [(\nabla_3 \times \mathbf{A}_3) + A_0 (\nabla_3 \times \mathbf{u})] + \\ &+ [(\nabla_3 \times \mathbf{A}_3) + A_0 (\nabla_3 \times \mathbf{u})] \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} &= \frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} - \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} + \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \mathbf{u} \right) - \frac{E^D}{\theta} \mathbf{u} \mathbf{u} \\ \frac{\mathbb{Z}_{4,as}}{\theta} &= \frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} \cdot \epsilon_3 + \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} - \frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} \mathbf{u} \right) \\ \frac{\mathbb{Z}_{4,as}^d}{\theta} &= \frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} \cdot \epsilon_3 - \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} - \frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} \mathbf{u} \right) \\ \frac{\mathbb{Z}_{4,s}^D}{\theta} &= \frac{\mathbb{P}_{3,s}^D}{\theta} - \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,s}^D}{\theta} + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^D}{\theta} \mathbf{u} \right) - S^D \mathbf{u} \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\nabla_4 \cdot \frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} &= \\ &= \left(\frac{D_{III}}{Ds} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \right) + \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} - \nabla_3 \cdot \left(\frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} \right) + \right) \cdot \mathcal{P}_3 + \\ &\quad + \left(\frac{E}{\theta} \mathcal{P}_3 - \frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} \right) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \\ &+ \left(\frac{D_{III}}{Ds} \left(\frac{E}{\theta} \right) + \nabla_3 \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \right) - \left(\frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} \right) : \nabla_3 \mathbf{u} + \right) \mathbf{u} = \\ &= \left(-\theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} + \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \right) \cdot \mathcal{P}_3 - \\ &- \left(\left(-\theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} + \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \right) \cdot \mathbf{u} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{D_{III}}{Ds} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \right) + \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} - \nabla_3 \cdot \left(\frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} \right) + \right) \cdot \mathcal{P}_3 = \\ &\quad + \left(\frac{E}{\theta} \mathcal{P}_3 - \frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} \right) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \\ &= -\theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \left(\frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} \cdot \mathcal{P}_3 \right) + \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \cdot \mathcal{P}_3 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(-\theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \left(\frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} - \mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \right) + \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \right) \cdot \mathcal{P}_3 = \\ &= -\theta \left(\nabla_3 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} + \theta \frac{D}{Ds} \left(\frac{1}{\theta} \right) \mathbf{u} \cdot \left(-\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \right) + \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} = \\ &= -\theta \left(\nabla_3 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} + \theta \frac{D}{Ds} \left(\frac{1}{\theta} \right) \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} + \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \cdot \mathcal{P}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{D_{III}}{Ds} \left(\frac{E}{\theta} \right) + \nabla_3 \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \right) - \left(\frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} \right) : \nabla_3 \mathbf{u} + \right) = \\ &\quad + 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \\ &= \theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \left(\frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} \cdot \mathbf{u} \right) - \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \cdot \mathbf{u} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\left(\theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} + \frac{E}{\theta} \mathbf{u} \right) - \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \cdot \mathbf{u} \right) \right) \\ &= \theta \left(\nabla_3 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} + \theta \frac{D}{Ds} \left(\frac{1}{\theta} \right) \frac{E}{\theta} - \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} \frac{D_{III} E}{Ds} + \frac{D}{Ds} \left(\frac{1}{\theta} \right) E + \frac{1}{\theta} \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s} + \nabla_3 \left(\frac{1}{\theta} \right) \cdot \mathbf{F}_{3,s} \\ - \left(\frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} \right) : \nabla_3 \mathbf{u} + 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} - \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \right) \cdot \mathbf{u} = \\ &= \left(\theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} + \frac{E}{\theta} \mathbf{u} \right) - \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \cdot \mathbf{u} \right) \\ &= \theta \left(\nabla_3 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} + \theta \frac{D}{Ds} \left(\frac{1}{\theta} \right) \frac{E}{\theta} - \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\frac{D_{III} E}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{F}_{3,s} - \mathbb{P}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{u} + 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} = -\frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \cdot \mathbf{u}$$

das ist die richtige Energiegleichung

$$\begin{aligned} &\frac{D_{III}}{Ds} \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \right) - \nabla_3 \cdot \left(\frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} \right) = \\ &= -\theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \left(\frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} \cdot \mathcal{P}_3 \right) - \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} - \\ &- \left(\frac{E}{\theta} \mathcal{P}_3 - \frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} \right) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} + \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \cdot \mathcal{P}_3 \\ &\frac{D_{III}}{Ds} \left(\frac{E}{\theta} \right) + \nabla_3 \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \right) = \\ &= \theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \left(\frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} \cdot \mathbf{u} \right) + \left(\frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} \right) : \nabla_3 \mathbf{u} \\ &- 2 \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \cdot \mathbf{u} = \end{aligned}$$

trivial, gleich vom Anfang an machen

$$\begin{aligned} \nabla_4 \cdot \frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} &= \theta \left(\nabla_4 \frac{1}{\theta} \right) \cdot \frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} - \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \\ &= -\frac{1}{\theta} \left(\nabla_4 \theta \right) \cdot \frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} - \frac{\Phi_{4,s}}{\theta} \end{aligned}$$

und für $\frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta}$ die Gleichung für T verwenden

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{Z}_{4,s}}{\theta} &= \frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} - \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} + \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \mathbf{u} \right) - \frac{E}{\theta} \mathbf{u} \mathbf{u} \\ \frac{\mathbb{Z}_{4,as}}{\theta} &= \frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} \cdot \epsilon_3 + \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} - \frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} \mathbf{u} \right) \\ \frac{\mathbb{Z}_{4,as}^d}{\theta} &= \frac{\mathbf{F}_{3,as}}{\theta} \cdot \epsilon_3 - \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} - \frac{\mathbf{F}_{3,as}^d}{\theta} \mathbf{u} \right) \\ \frac{\mathbb{Z}_{4,s}^D}{\theta} &= \frac{\mathbb{P}_{3,s}^D}{\theta} - \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}_{3,s}^D}{\theta} + \frac{\mathbf{F}_{3,s}^D}{\theta} \mathbf{u} \right) - S^D \mathbf{u} \mathbf{u} \end{aligned}$$

8

⁸ Entstehung **1978/79** nach Erscheinen des Buches: D. Mihalas: "Stellar Atmospheres". Freeman, San Francisco (1978). **1979/80**: Manuskript eingereicht für Beiträge zur Physik der Atmosphäre, Heft 2, 1980, K. H. Hinkelmann- Heft.(65. Geb.). Nach nicht akzeptierten Änderungswünschen von Gutachtern, Verzicht auf Veröffentlichung an dieser Stelle.1980 (Februar). **DMT 80**: Poster: "Über Grundlagen der meteorologischen Strahlungs- Hydrodynamik". Veröff. Annalen d. Met. (Neue Folge), Nr.15, Offenbach a. M. 1980. **1982/83** (WS): Vorlesung: "Relativistische Strahlungshydrodynamik" (Ausarbeitung durch D. Carius). **1992** (Nov.):

Als **Ergänzung** geben wir noch eine „anschauliche“ Version dieser Gleichungen an:

$$\nabla_4 \cdot (\mathbb{P}_{3,s} - \mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s}) = \mathbf{F}_{3,s} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} + E \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \quad (1.19a)$$

$$\nabla_4 \cdot (\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{u}E) = \mathbb{P}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{u} - \mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \quad (1.20a)$$

wobei später $\mathbb{P}_{3,s} - \mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s} = \mathbb{P}_{3,s} - \mathbf{V}\mathbf{F}_{3,s}^*$ als totaler Impulsflusstensor und $\mathbf{F}_{3,s}^* + \mathbf{V}E$ als totaler Energieflussvektor interpretiert werden können.

Als weitere **Ergänzung** bemerken wir, dass in (1.20) außer dem ersten Term der linken Seite die anderen Terme keine Zustandsfunktionen bilden.

Mittels eines sog. **integrierenden Nenners** θ führen wir deshalb in Hinblick auf die später zu behandelnden Entropiegleichungen konventionell die Zustandsfunktion S (Entropie) gemäß

$$\frac{D_{III}E}{Ds} = \theta \frac{D_{III}S}{Ds} \quad (1.21)$$

ein und erhalten aus (1.20) hierfür die Bilanzgleichung (1.22)

$$\frac{D_{III}S}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{S}_{3,s} = -\mathbf{S}_{3,s} \cdot \frac{1}{\theta} \nabla_3 \theta + \mathbb{R}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{u} - 2\mathbf{S}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds}$$

wobei

$$\mathbf{S}_{3,s} = \frac{\mathbf{F}_{3,s}}{\theta} \quad \text{und} \quad \mathbb{R}_{3,s} = \frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} \quad (1.23)$$

Bis auf den letzten Term der rechten Seite stellt sich

$$Q(S) = \frac{1}{\theta} \left(-\mathbf{S}_{3,s} \cdot \nabla_3 \theta + \mathbb{P}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{u} - 2\mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \geq 0$$

Die beiden ersten Terme sind (hier noch strukturell) als positive Quellterme der skalaren Entropie S bekannt.

Man kann mit Gleichung (1.19) ebenso verfahren: Division durch θ

$$\left(\frac{E}{\theta} \mathcal{P}_3 - \mathbb{R}_{3,s} \right) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - \frac{1}{\theta} \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} + \left(\frac{1}{\theta} \frac{D_{III}\mathbf{F}_{3,s}}{Ds} + \mathbf{S}_{3,s} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} \right) = 0$$

liefert mit

$$\frac{1}{\theta} \frac{D_{III}\mathbf{F}_{3,s}}{Ds} = \frac{D_{III}\mathbf{S}_{3,s}}{Ds} + \mathbf{S}_{3,s} \frac{1}{\theta} \frac{D\theta}{Ds}$$

$$\frac{1}{\theta} \nabla_3 \cdot \mathbb{P}_{3,s} = \nabla_3 \cdot \mathbb{R}_{3,s} + \mathbb{R}_{3,s} \cdot \frac{1}{\theta} \nabla_3 \theta$$

zunächst

$$\left(\frac{E}{\theta} \mathcal{P}_3 - \mathbb{R}_{3,s} \right) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} - \nabla_3 \cdot \mathbb{R}_{3,s} + \left(\frac{D_{III}\mathbf{S}_{3,s}}{Ds} + \mathbf{S}_{3,s} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} \right) =$$

$$= -\mathbf{S}_{3,s} \frac{1}{\theta} \frac{D\theta}{Ds} + \mathbb{R}_{3,s} \cdot \frac{1}{\theta} \nabla_3 \theta$$

und schließlich, etwas umgeformt:

$$\left(\frac{D_{III}\mathbf{S}_{3,s}}{Ds} + \mathbf{S}_{3,s} \cdot \nabla_3 \mathbf{u} \right) - \nabla_3 \cdot \mathbb{R}_{3,s} =$$

$$= \frac{1}{\theta} \left(-\mathbf{S}_{3,s} \frac{D\theta}{Ds} + \mathbb{P}_{3,s} : \nabla_3 \theta - \frac{1}{\theta} (E\mathcal{P}_3 - \mathbb{P}_{3,s}) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \quad (1.24)$$

Dies könnte man als eine Gleichung für den Entropieflussvektor $\mathbf{S}_{3,s}$ auffassen.

Zusammen mit (1.22), d. h.

$$\frac{D_{III}S}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{S}_{3,s} =$$

$$= \frac{1}{\theta} \left(-\mathbf{S}_{3,s} \cdot \nabla_3 \theta + \mathbb{P}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{u} - 2\mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right)$$

wären diese Gleichungen – bis auf die rechten Seiten – auch aus der 4D-Divergenz des 4D-Tensors $\mathbb{Z}_{4,s}$ hervorgegangen, d. h. aus

$$\mathbb{Z}_{4,s} = \frac{\mathbb{T}_{4,s}}{\theta} = \frac{\mathbb{P}_{3,s}}{\theta} - \left(\frac{\mathbf{u}\mathbf{F}_{3,s} + \mathbf{F}_{3,s}\mathbf{u}}{\theta} \right) - \mathbf{S}\mathbf{u}\mathbf{u} =$$

$$= \mathbb{R}_{3,s} - (\mathbf{u}\mathbf{S}_{3,s} + \mathbf{S}_{3,s}\mathbf{u}) - \mathbf{S}\mathbf{u}\mathbf{u} \quad (1.25)$$

$$\nabla_4 \cdot \mathbb{Z}_{4,s} = -\mathbf{Q}_{4,s}$$

allerdings unter Ergänzung durch den 4D-Quellvektor

$$\mathbf{Q}_{4,s} = \mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathcal{P}_3 - (\mathbf{Q}_{4,s} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} =$$

$$= \left(-\mathbf{S}_{3,s} \frac{1}{\theta} \frac{D\theta}{Ds} + \mathbb{R}_{3,s} \cdot \frac{1}{\theta} \nabla_3 \theta + \left(S - \frac{E}{\theta} \right) \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right) \cdot \mathcal{P}_3 -$$

$$- \left(-\mathbf{S}_{3,s} \cdot \frac{1}{\theta} \nabla_3 \theta \right) \mathbf{u}$$

Man beachte, dass $E/\theta \neq S$, da S durch (1.21) definiert war.

Gleichungen (1.19) für den „Impuls“, (1.20) für die „Energie“, (1.24) für den „Energiestromvektor“ bilden bei Vorgabe der nichtlinearen Wechselwirkungen $\mathbb{P}_{3,s}$ zusammen mit thermodynamischen Zustandsgrößen, die durch den integrierenden Nenner θ eingeführt werden können, bereits ein geschlossenes System zur Bestimmung der unbekanntenen. Gleichung (1.22), in der Form

$$\frac{D_{III}S}{Ds} + \nabla_3 \cdot \mathbf{S}_{3,s} =$$

$$= \frac{1}{\theta} \left(-\mathbf{S}_{3,s} \cdot \nabla_3 \theta + \mathbb{P}_{3,s} : \nabla_3 \mathbf{u} - 2\mathbf{F}_{3,s} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Ds} \right)$$

geschrieben, erinnert bereits an den **Zweiten Hauptsatz** wenn gefordert wird dass die rechte Seite der Gleichung stets ≥ 0 sein muss und damit eine Richtung der Vorgänge bestimmt wird.

Vortrag im Rahmen der C. F. Gauß -Professur der Akademie der Wiss. und der Universität Göttingen: "Über Grundlagen der relativistischen Physik der Fluide, formuliert auf der Basis von C. Eckarts Dekompositionstheorem". **1993**: Vortrag: "Geometrisierung der Physik der Fluide- Relativistische Thermo- Strahlungs- Elektro- Magnetohydrodynamik". Arbeitskreis Theoretische Meteorologie, Kloster Heiligengrabe, 27. September/1. Oktober. **1995**: Vortrag: „Die geometrische Grundstruktur der (gesamten) klassischen Theoretischen Physik“. Arbeitskreis Theoretische Meteorologie, Hotel Tann, Klobenstein/Ritten, Südtirol, 14. Bis 18. September. **2010**: Vortrag: „Strahlungs- Hydrodynamik“. Arbeitskreis Theoretische Meteorologie, Kloster Schöntal 5. bis 10. Oktober.